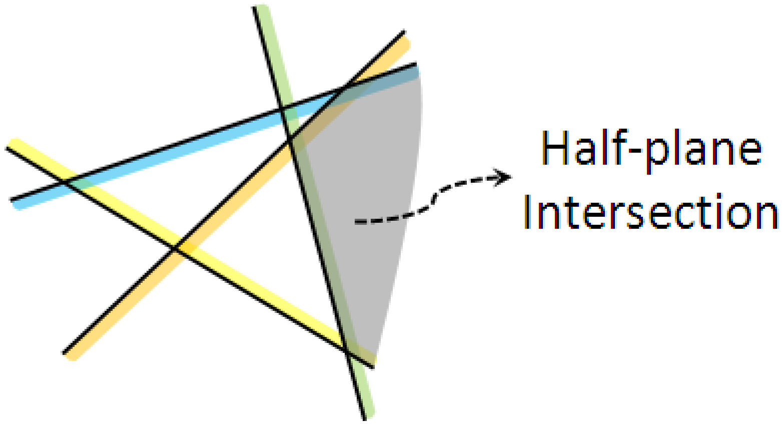
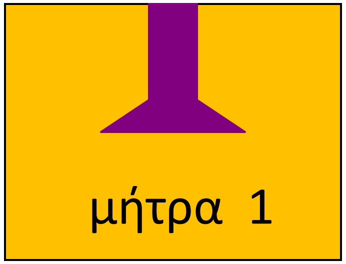


Τομή Ημιεπιπέδων

Γραμμικός Προγραμματισμός

Εφαρμογή: Βιομηχανική Παραγωγή με Μήτρες

Το Πρόβλημα της Χύτευσης



Το αντικείμενο δεν μπορεί να αποκολληθεί

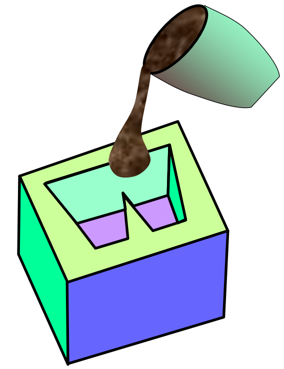
Το αντικείμενο μπορεί να αποκολληθεί

Για δεδομένο αντικείμενο υπάρχει μήτρα από την οποία μπορεί να αποκολληθεί;

Υποθέσεις

- Το αντικείμενο είναι πολυεδρικό
- Η μήτρα αποτελείται από ένα τμήμα μόνο
  - ❑ Δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε σφαίρες με μήτρες από ένα τμήμα.
- Το αντικείμενο θα πρέπει να αποκολλάται με μία κίνηση μετατόπισης.
  - ❑ Οι βίδες δεν μπορούν να αποκολληθούν με μία απλή κίνηση μετατόπισης.

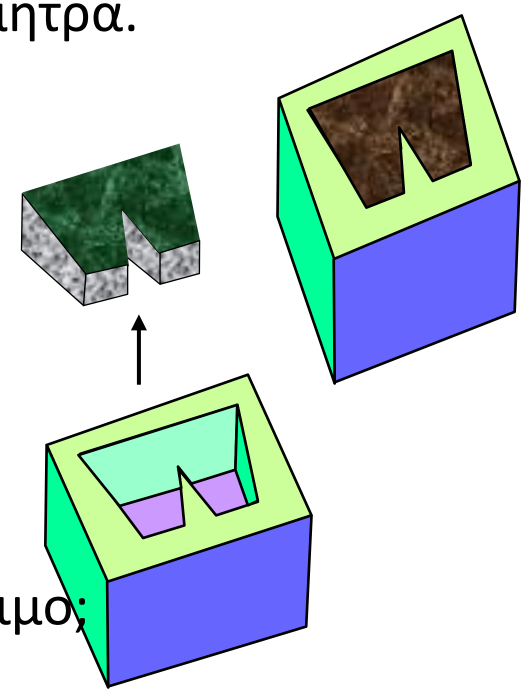
Χύτευση



Πώς επιλέγουμε τον προσανατολισμό;

- Το αντικείμενο έχει μία οριζόντια *άνω έδρα*, που είναι και η μοναδική που δεν είναι σε επαφή με τη μήτρα.

- # πιθανών προσανατολισμών = # εδρών

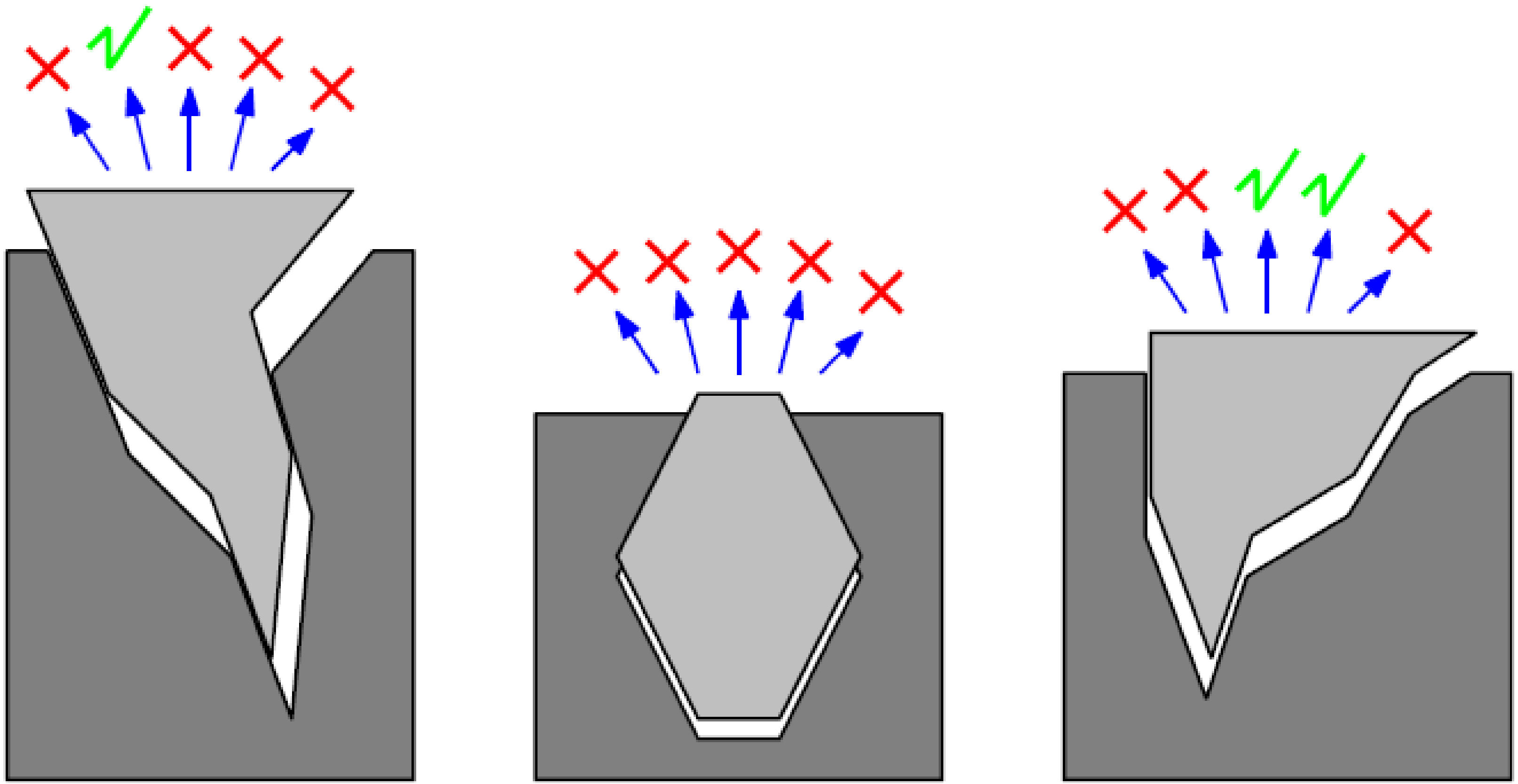


Ένα αντικείμενο είναι *χυτεύσιμο* αν μπορεί να αποκολληθεί από τη μήτρα του για κάποιον προσανατολισμό.

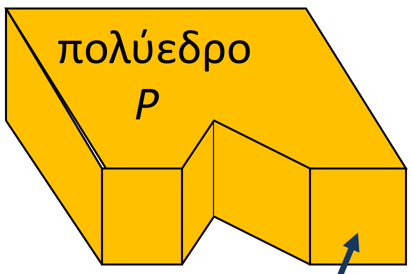
Πώς βρίσκουμε αν ένα αντικείμενο είναι χυτεύσιμο;

Για κάθε προσανατολισμό, βρίσκουμε αν υπάρχει κατεύθυνση κατά την οποία μπορεί το αντικείμενο να αποκολληθεί.

Χυτευσιμότητα



Πιο Τυπικά…



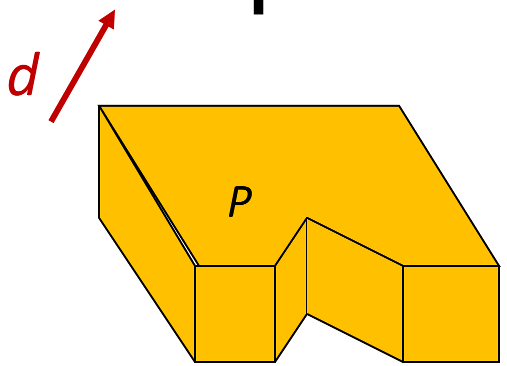
- **Η μήτρα είναι ένας ορθογώνιος όγκος με μία κοιλότητα που ταιριάζει <u>ακριβώς</u> στο *P*.**
- **Η άνω έδρα της μήτρας αντιστοιχεί στο *xy*-επίπεδο.**
- **Η άνω έδρα του πολύεδρου είναι επίσης στο *xy*-επίπεδο.**

***Συνήθης έδρα f*:** μία έδρα του πολυέδρου διαφορετική της άνω έδρας του.

F : η έδρα της μήτρας που αντιστοιχεί στην ***f*** του πολυέδρου.

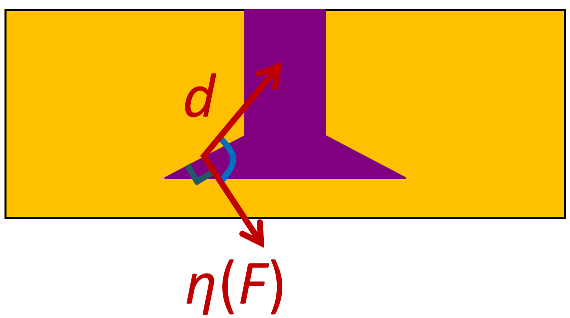
<u>**Πρόβλημα:**</u> Υπάρχει κατεύθυνση ***d (διάνυσμα)*** **έτσι ώστε το *P* να μπορεί να μετατοπιστεί χωρίς σύγκρουση με τη μήτρα;**

Αναγκαία Συνθήκη για Αποκόλληση

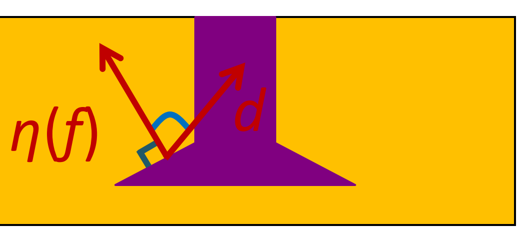


Το *d* έχει θετική *z* συνιστώσα (ανοδική πορεία)

Η μετατόπιση της έδρας *f* μπορεί μόνο να ολισθήσει στην αντίστοιχη έδρα *F* της μήτρας.



$\Rightarrow$η *F* εμποδίζει τη μετατόπιση αν το *d* δημιουργεί μία γωνία > π/2 με την εξωφερή της κάθετο *η*(*F*).



$\Rightarrow$η *d* πρέπει να έχει γωνία > π/2 με την εξωφερή κάθετο κάθε έδρας του *P* για να είναι επιτυχής η μετατόπιση.

Είναι Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη

<u>Θεώρημα:</u> Το *P* μπορεί να αποκολληθεί από τη μήτρα του μέσω μίας μετατόπισης κατά τη διεύθυνση *d* αν και μόνο αν το *d* σχηματίζει γωνία ≥ π/2 με την εξωφερή κάθετο κάθε συνήθους έδρας του *P*.

Αν Κάνουμε Πολλές Μετατοπίσεις;

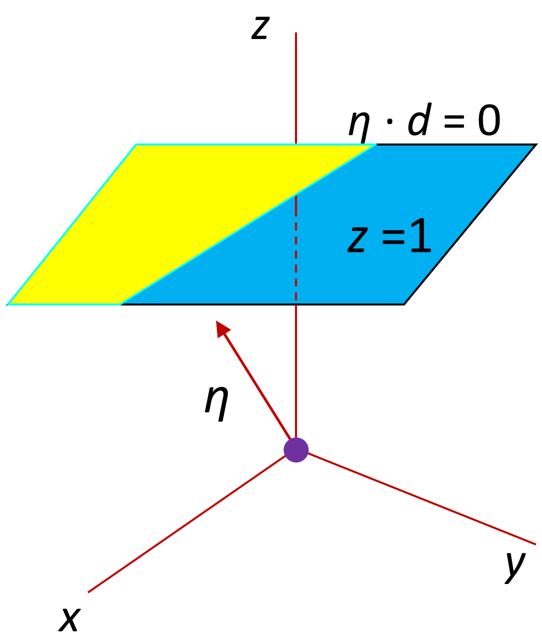
Έστω ένα πολύεδρο που αποκολλάται μετά από μία ακολουθία μετατοπίσεων.

$\Rightarrow$ Υπάρχει τουλάχιστον μία κατεύθυνση *d* με γωνία $\geq \pi/2$ με την εξωφερής κάθετο κάθε συνήθους έδρας του πολυέδρου.

$\Rightarrow$ Άρα είναι αποκολλήσιμο κατά την κατεύθυνση *d*.

Επομένως, πολλαπλές μετατοπίσεις δεν βοηθάνε.

Γεωμετρική Ερμηνεία



Έστω $d = (d_x, d_y, 1)$

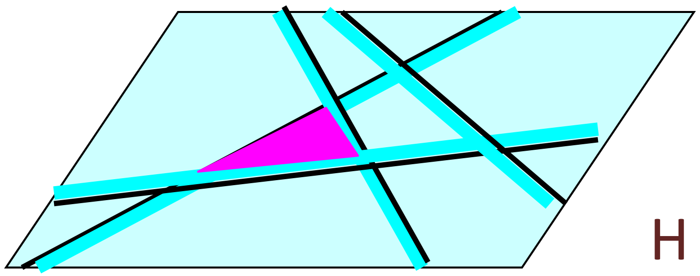
Έστω $\eta = (\eta_x, \eta_y, \eta_z)$ το εξωφερές κάθετο διάνυσμα μίας έδρας. Τότε:

$$\eta_x d_x + \eta_y d_y + \eta_z \leq 0$$

- μία επιφάνεια στη μία πλευρά της γραμμής $\eta \cdot d = 0$ στο επίπεδο $z = 1$.

- όταν η έδρα του P είναι οριζόντια (π.χ. $\eta_x = 0$ και $\eta_y = 0$) τότε ο περιορισμός είναι πάντα αληθής για όλα τα d ή πάντα ψευδής

Το Γεωμετρικό Πρόβλημα



Κάθε μη οριζόντια έδρα ορίζει ένα κλειστό ημιεπίπεδο του επιπέδου $z = 1$.

Η ***τομή*** όλων αυτών των ημιεπιπέδων είναι το σύνολο των σημείων που αντιστοιχούν σε κατευθύνσεις κατά τις οποίες το πολύεδρο μπορεί να αποκολληθεί.

Πρόβλημα: Δοθέντων ημιεπιπέδων στο 2D, να βρεθεί η τομή τους.

Έλεγχος χητευσιμότητας: Ελέγχουμε όλες τις έδρες ως άνω έδρες.

- ★ **Αυτό μπορεί να γίνει σε αναμενόμενο $O(n^2)$ χρόνο και $O(n)$ χώρο.**
- ★ **Αν το P είναι χητεύσιμο, μία μήτρα και μία κατεύθυνση μετατόπισης μπορούν να υπολογιστούν στον ίδιο χρόνο.**

Τομή Ημιεπιπέδων

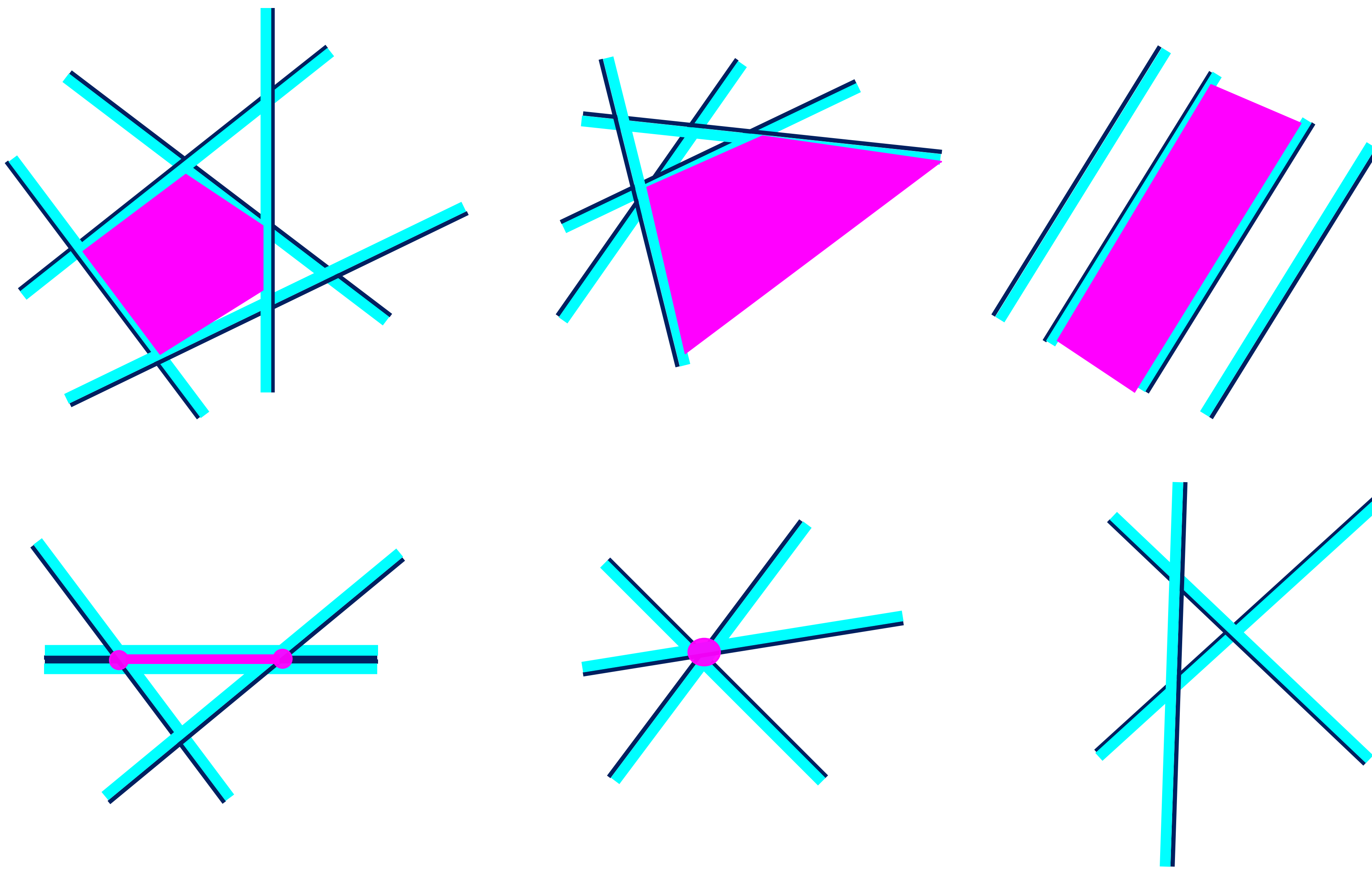
Δίνονται *n* ημιεπίπεδα (κυρτά σύνολα)

$$h_i \ : \quad a_i x + b_i y \ \leq \ c_i \, , 1 \leq \ i \ \leq \ n$$

Η τομή τους είναι μία κυρτή περιοχή του επιπέδου.

- Κυρτή πολυγωνική περιοχή
- Το πολύ *n* ακμές
- Μπορεί να μην είναι φραγμένη
- Μπορεί να εκφυλίζεται σε γραμμή, ευθύγραμμο τμήμα, σημείο ή και το κενό σύνολο.

Μερικές Περιπτώσεις



Αλγόριθμος Διαίρει και Βασίλευε

IntersectHalfplane(H)

Input: Ένα σύνολο H από n ημιεπίπεδα στο επίπεδο

Output: Ή κυρτή πολυγωνική περιοχή $C = \cap_{h \in H} h$

1. Αν $|H| = 1$
2. τότε $C \leftarrow$ το μοναδικό ημιεπίπεδο $h \in H$
3. αλλιώς χωρίζουμε το H σε H_1 και H_2 μεγέθους $\lceil n/2 \rceil$ και $\lfloor n/2 \rfloor$.
4. $C_1 \leftarrow$ IntersectHalfplane(H_1)
5. $C_2 \leftarrow$ IntersectHalfplane(H_2)
6. $C \leftarrow$ IntersectConvexRegion(C_1, C_2)

Απόδοση

Έστω $T(n)$ ο χρόνος για n ημιεπίπεδα.

IntersectHalfplane(H)

Input: Ένα σύνολο H από n ημιεπίπεδα στο επίπεδο

Output: Ή κυρτή πολυγωνική περιοχή $C = \cap_{h \in H} h$

1. Αν $|H| = 1$
2. τότε $C \leftarrow$ το μοναδικό ημιεπίπεδο $h \in H$
3. αλλιώς χωρίζουμε το H σε H_1 και H_2 μεγέθους $\lceil n/2 \rceil$ και $\lfloor n/2 \rfloor$.
4. $C_1 \leftarrow$ IntersectHalfplane(H_1) // $T(n/2)$
5. $C_2 \leftarrow$ IntersectHalfplane(H_2) // $T(n/2)$
6. $C \leftarrow$ IntersectConvexRegion(C_1, C_2) // $O(n \log n)$

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{αν } n = 1 \\ O(n \log n) + 2T(n/2) & \text{αν } n > 1. \end{cases} \Rightarrow T(n) = O(n \log^2 n)$$

Βελτίωση

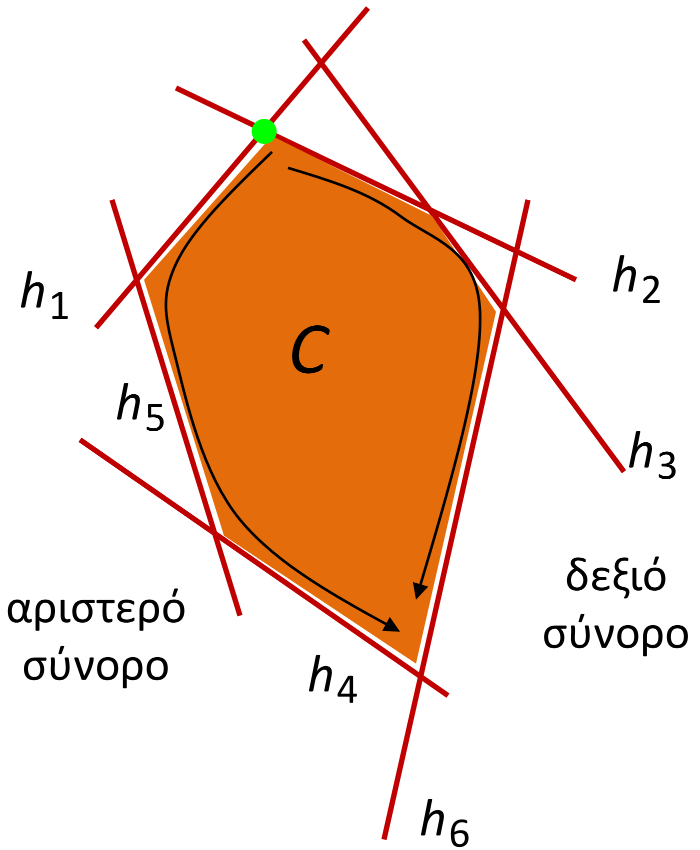
- Ο αλγόριθμος τομής κυρτών περιοχών (Κεφ. 2) είναι αρκετά γενικός και δεν εκμεταλλεύεται τις ιδιαιτερότητες του προβλήματος.
- Μπορούμε με κάποιο τρόπο να εκμεταλλευτούμε περισσότερο την κυρτότητα;

Υπόθεση (εκφυλισμοί):

Οι περιοχές των οποίων θέλουμε να υπολογίσουμε την τομή είναι δισδιάστατες.

Οι εκφυλισμένες περιπτώσεις είναι πιο απλές (αν είναι γραμμές ή σημεία).

Αναπαράσταση Κυρτής Περιοχής



$L(C) : h_1, h_5, h_4$

$R(C) : h_2, h_3, h_6$

Το αριστερό και δεξιό σύνορο αποθηκεύονται ως ταξινομημένες λίστες ημιεπιπέδων κατά τη διάρκεια της διαπέρασης από πάνω προς τα κάτω.

Οι λίστες L και R.

Οι κορυφές μπορούν να υπολογιστούν ως τομές διαδοχικών οριοθετικών ευθειών.

Μία οριζόντια ακμή ανήκει στην L αν φράσσει το C από πάνω, αλλιώς ανήκει στην R.

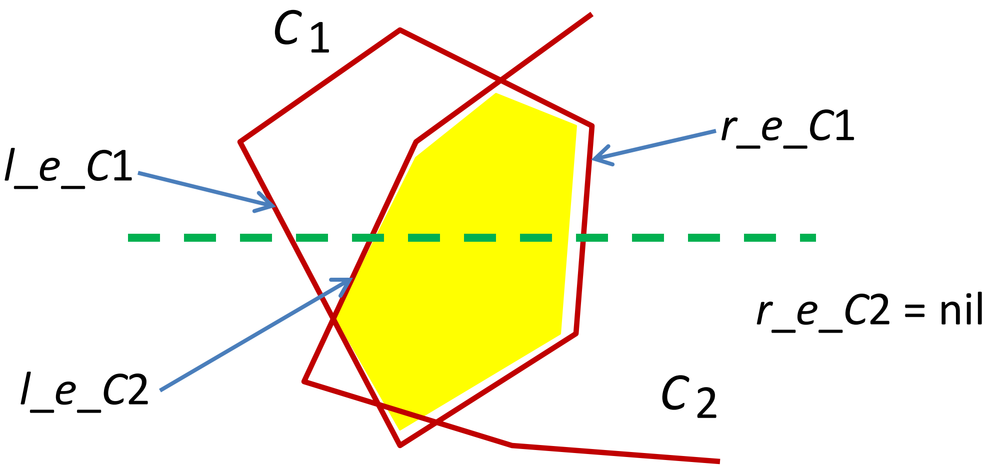
Σάρωση Επιπέδου

Σαρώνουμε προς τα κάτω για να συγχωνεύσουμε δύο κυρτές περιοχές C_1 και C_2.

- Το πολύ 4 ακμές τέμνουν τη γραμμή σάρωσης.

  l_e_C1, r_e_C1, l_e_C2, r_e_C2

- Ο αντίστοιχος δείκτης είναι nil αν δεν υπάρχει τομή.



Δεν Χρειάζεται Ουρά Συμβάντων

Η σάρωση ξεκινά στην τεταγμένη της υψηλότερης κορυφής των C_1 και C_2 συνόρων ή στο $\propto$ αν κάποιο από αυτά έχει μία ακμή που εκτείνεται στο άπειρο προς τα πάνω.

Το επόμενο συμβάν:

Το υψηλότερο από τα κάτω άκρα των τεσσάρων ακμών που τέμνουν την γραμμή σάρωσης. $O(1)$

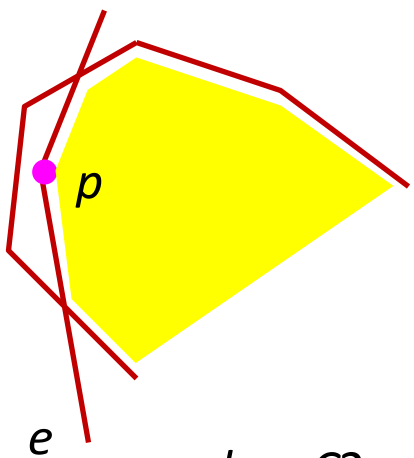
Για την νέα ακμή *e* μπορεί να ισχύουν τα εξής:

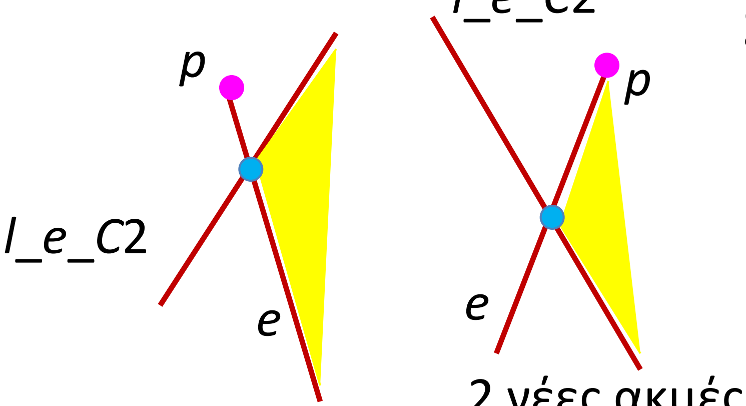
1. ανήκει στην C_1 και στο αριστερό σύνορο
2. ανήκει στην C_1 και στο δεξιό σύνορο
3. ανήκει στην C_2 και στο αριστερό σύνορο
4. ανήκει στην C_2 και στο δεξιό σύνορο

Αριστερό Σύνορο του C_1 (1)

p: άνω άκρο της *e*.

Κάνουμε 3 βήματα σε σχέση με τα *e* και *p* για την τομή *C*:





1. Το *p* κείται εντός του C_2

$\Rightarrow$ το *C* έχει ακμή με το *p* ως άνω άκρο.

Καθορίζεται ελέγχοντας αν το *p* είναι μεταξύ των *l_e_C*2 και *r_e_C*2.

Πρόσθεση του ημιεπιπέδου που περιέχει το *e* στο σύνορό του στη λίστα ***L*(*C*)**.

2. η *e* τέμνει την *l_e_C*2.

$\Rightarrow$ η τομή είναι κορυφή του *C*.

$\Rightarrow$ Η ακμή του *C* που ξεκινά από την τομή είτε είναι τμήμα της *e* ή της *l_e_C*2.

Πρόσθεσε τις κατάλληλες ακμές στην λίστα ***L*(*C*)**.

Αριστερό Σύνορο του C_1 (2)

3. η *e* τέμνει το *r_e_C*2.

$\Rightarrow$ Οι δύο ακμές συνεισφέρουν από μία ακμή στο *C* που ξεκινά από το σημείο τομής τους.

Περίπτωση 1. οι νέες ακμές ξεκινάνε από την τομή

Προσθέτουμε το ημιεπίπεδο που ορίζει την *e* στην λίστα ***L*** και το ημιεπίπεδο που ορίζει την *r_e_C*2 στην λίστα ***R***.

Περίπτωση 2. οι νέες ακμές τελειώνουν στην τομή

Δεν κάνουμε τίποτα αφού αυτές οι ακμές έχουν ήδη ανακαλυφθεί από άλλες περιπτώσεις.

Απόδοση

Απαιτείται $O(1)$ χρόνος για το χειρισμό κάθε ακμής.

Η τομή δύο κυρτών πολυγωνικών περιοχών απαιτεί $O(n)$ χρόνο.

Αναδρομή:

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & \text{αν } n = 1 \\ O(n) + 2T(n/2) & \text{αν } n > 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n\log n)$$

<u>Θεώρημα:</u> Η τομή n ημιεπιπέδων στο επίπεδο μπορεί να υπολογισθεί σε $O(n\log n)$ χρόνο και $O(n)$ χώρο.

Μπορούμε Καλύτερα;

- Όχι αν θέλουμε να βρούμε όλες τις κατευθύνσεις (αντίστοιχο με πρόβλημα ταξινόμησης)

- Ναι, αν ψάχνουμε ένα σημείο μόνο (μία κατεύθυνση)

Τυχαιοκρατικός Αυξητικός Αλγόριθμος

Το Πρόβλημα Γραμμικής Βελτιστοποίησης

μεγιστοποίηση $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_d x_d$

υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1d} x_d &\le b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2d} x_d &\le b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nd} x_d &\le b_n
\end{aligned}
$$

Γραμμικό πρόγραμμα διάστασης d

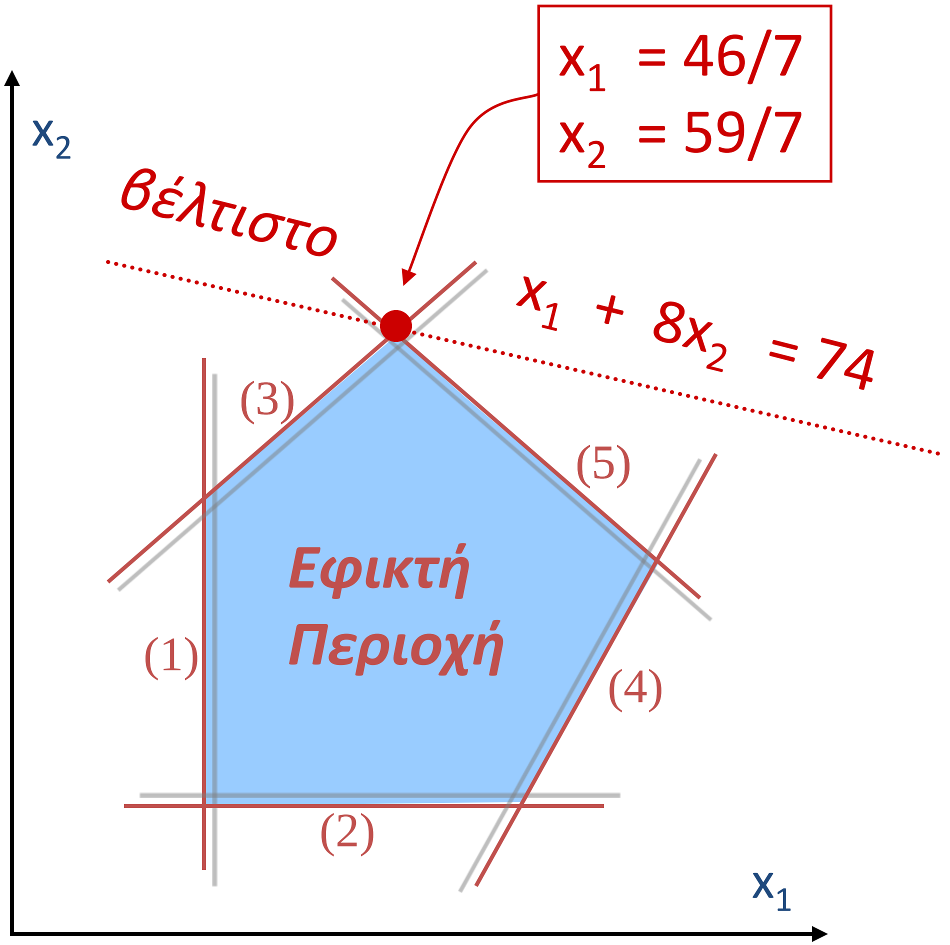
Δύο Διαστάσεις

μεγιστοποίηση $x_1 + 8x_2$

υπό τις προϋποθέσεις:

(1)	x_1				$\geq$	3
(2)				x_2	$\geq$	2
(3)	$-3x_1$	+	$4x_2$		$\leq$	14
(4)	$4x_1$	–	$3x_2$		$\leq$	25
(5)	x_1	+	x_2		$\leq$	15

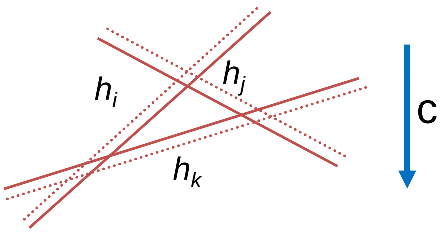
Βέλτιστοι βασικοί περιορισμοί



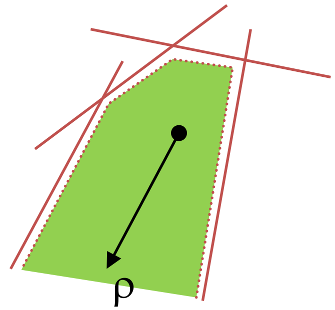
Αυξητικός Αλγόριθμος

Μέθοδος: Αυξητική πρόσθεση προϋπόθεσης διατηρώντας την τρέχουσα βέλτιστη κορυφή.

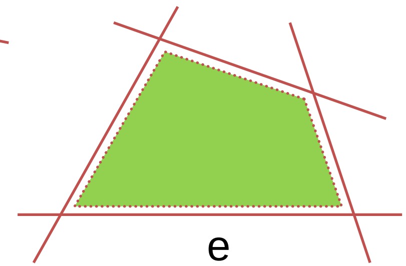
Δυνατές Περιπτώσεις:



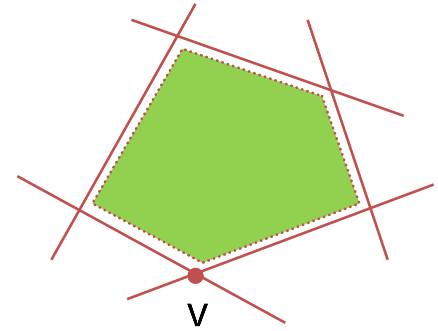
Ανέφικτο



Μη φραγμένη



Δεν υπάρχει μοναδικό βέλτιστο



Μοναδικό Βέλτιστο

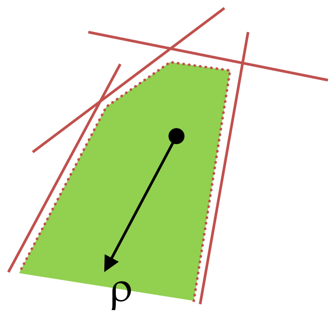
Είσοδος: (H, c), $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ n ημιεπίπεδα,
c = διάνυσμα αποτιμητικής συνάρτησης

Έξοδος: Μη εφικτό: (i, j, k), ή
μη-φραγμένο: ρ, ή
βέλτιστο: $v = \operatorname{argmax}_x \{ c^T x \mid x \in h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n \}$.

Ορισμός: $C(i) = h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_i$, για $i = 1 \ldots n$
v_i = βέλτιστη κορυφή του $C(i)$, για i=2..n. $c^T v_i = \max \{ c^T x \mid x \in C(i) \}$
Ισχύει: $C(1) \supseteq C(2) \supseteq \ldots \supseteq C(n)$.

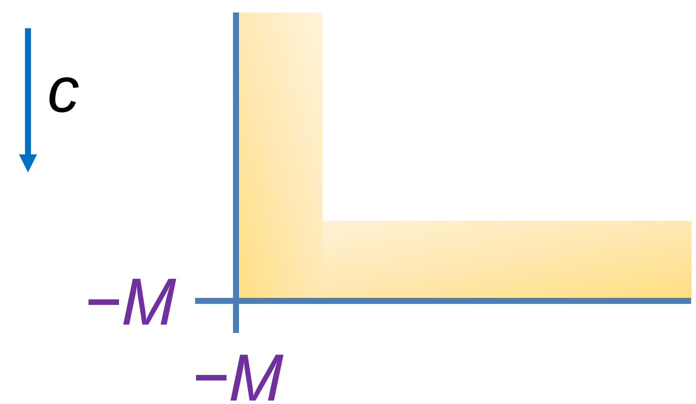
Απαίτηση

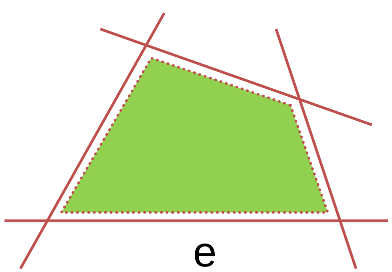
Η λύση κάθε ενδιάμεσου προβλήματος είναι καλά ορισμένη και μοναδική.



Μη φραγμένη

c_x, $c_y < 0$: Προσθέτουμε τους περιορισμούς:
p_x, $p_y \geq -M$ (M κατάλληλα μεγάλος αριθμός)



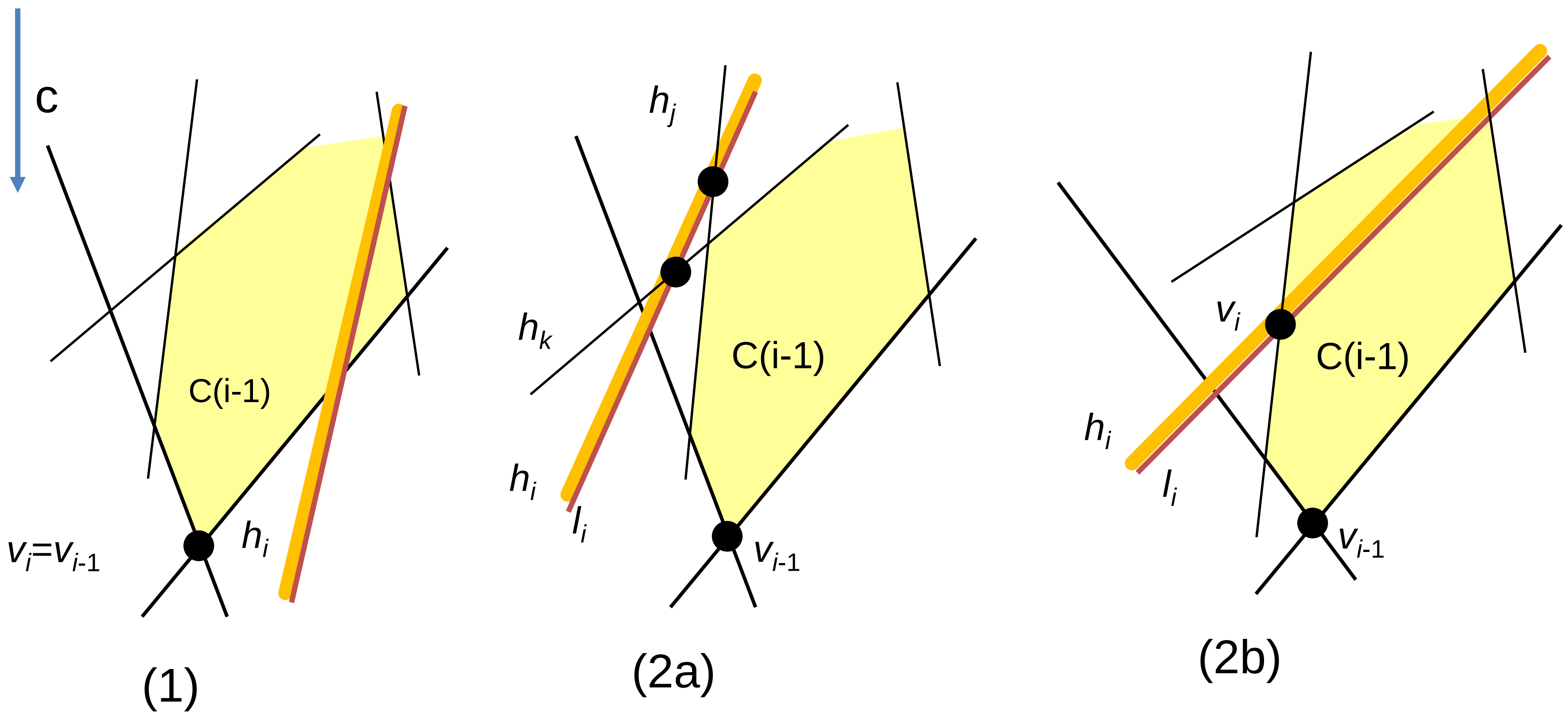


Δεν υπάρχει μοναδικό βέλτιστο

Παίρνουμε την λεξικογραφικά μικρότερη

Αυξητικός Αλγόριθμος

Λήμμα: (1) $v_{i\,-1} \in h_i \Rightarrow v_{i\,-1} \in C(i) \quad \Rightarrow \quad v_i \leftarrow v_{i\,-1}$
(2) $v_{i\,-1} \notin h_i \Rightarrow$
(2a) $C(i) = \varnothing$, ή
(2b) $v_i \in l_i \cap C(i\text{-}1)$, l_i = οριοθετική γραμμή του h_i .



Αυξητικός Αλγόριθμος

Αλγόριθμος Φραγμένος Διδιάστατος(H, c, m_1, m_2)

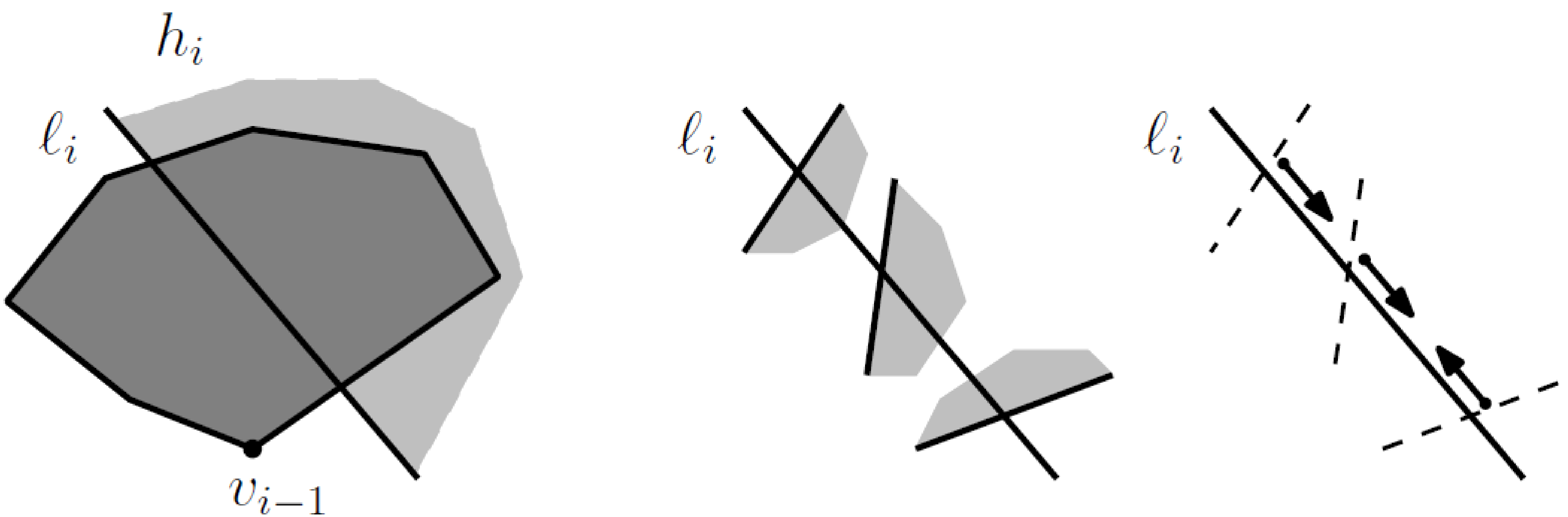
1. Έστω v_0 η γωνία της C_0
2. **Για** $i = 1$ **έως** n
3. **Εάν** $v_{i-1} \in h_i$
4. **τότε** $v_i = v_{i-1}$
5. **Αλλιώς** v_i = το σημείο p επί της l_i που μεγιστοποιεί την αποτιμητική συνάρτηση υπό τους περιορισμούς του H_{i-1}
6. **Εάν** δεν υπάρχει τέτοιο p
7. **τότε** αναφέρουμε ότι το πρόγραμμα είναι ανέφικτο και τερματίζουμε
8. **Επέστρεψε** v_n

Πώς;;;

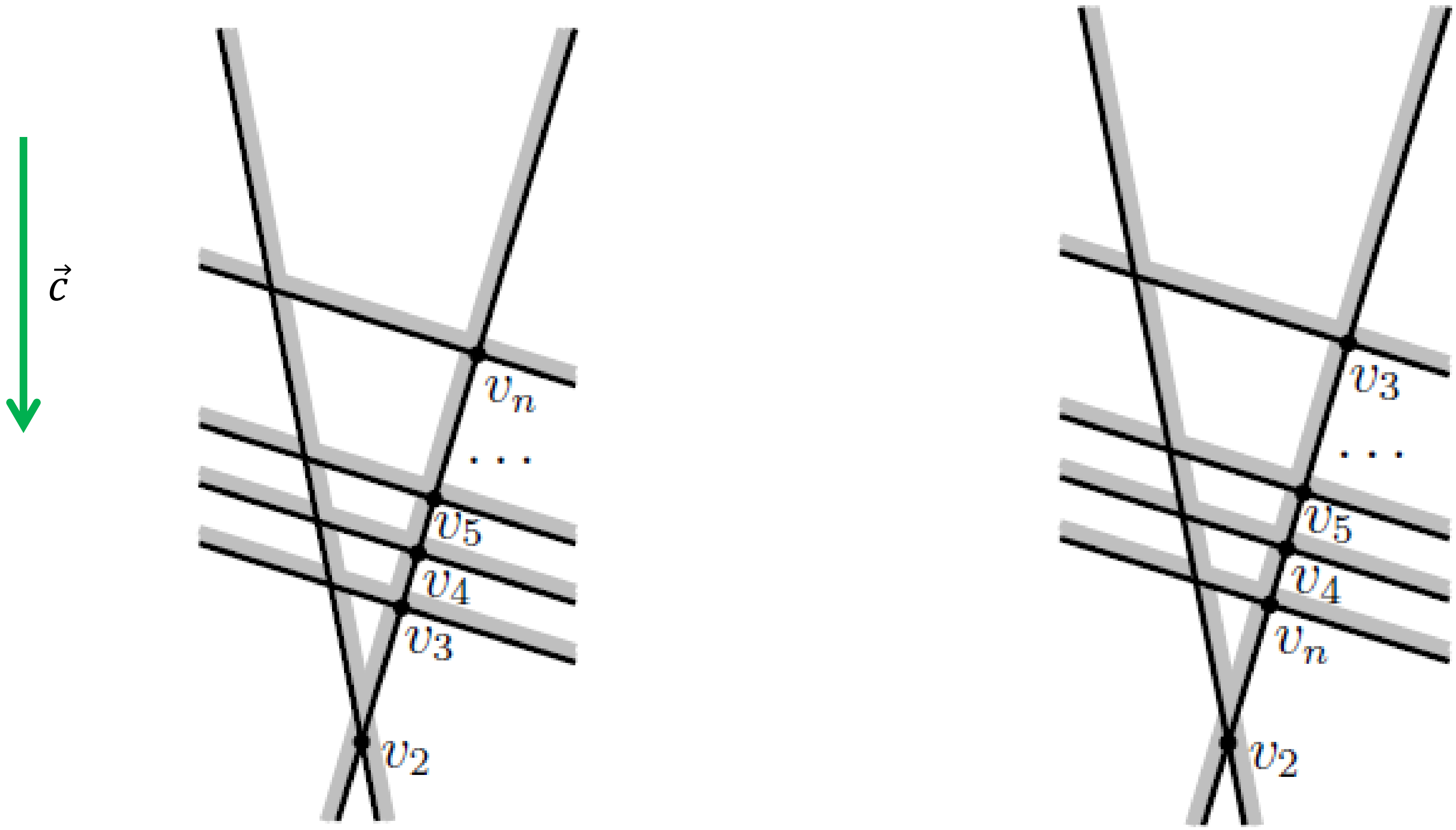
Απόδοση: $O(n^2)$

Μονοδιάστατο Γραμμικό Πρόγραμμα

Αν $v_{i\text{-}1} \notin h_{i\text{-}1}$, πως βρίσκουμε το σημείο *p* στην l_i;



Χειρότερη Περίπτωση



Τυχαιοκρατία

Random(k): επιστρέφει έναν ακέραιο i $\in$ 1…k, με ίση πιθανότητα 1/k.
[Χρήση μίας τυχαίας γεννήτριας.]

Αλγόριθμος ΤυχαίαΜετάθεση(*A*) *O*(*n*) χρόνος

Είσοδος: Πίνακας *A*[1..*n*]

Έξοδος: Μία τυχαία μετάθεση του *A*[1..*n*], όπου κάθεμία από τις *n*! μεταθέσεις είναι ισοπίθανη.

Για *k* = *n* **έως** 2

αντάλλαξε το *A*[*k*] με το *A*[Random(*k*)]

Αυτός ο αλγόριθμος είναι μία θεμελιώδης «αρχικοποίηση» πολλών τυχαιοκρατικών αλγορίθμων.

Τυχαιοκρατικός Αυξητικός Αλγόριθμος

Αλγόριθμος Τυχαιοκρατικός Φραγμένος Διδιάστατος(H, c, m_1, m_2)

1. Έστω v_0 η γωνία της C_0
2. **ΤυχαίαΜετάθεση(H[1…n])**
3. **Για** i = 1 **έως** n
4. **Εάν** $v_{i-1} \in h_i$
5. **τότε** $v_i = v_{i-1}$
6. **Αλλιώς** v_i = το σημείο p επί της l_i που μεγιστοποιεί την αποτιμητική συνάρτηση υπό τους περιορισμούς του h_{i-1}
7. **Εάν** δεν υπάρχει τέτοιο p
8. **τότε** αναφέρουμε ότι το πρόγραμμα είναι ανέφικτο και τερματίζουμε
9. **Επέστρεψε** v_n

Τυχαιοκρατικός Αυξητικός Αλγόριθμος

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ένας διδιάστατος γραμμικού προγραμματισμού τυχαιοκρατικός αυξητικός αλγόριθμος έχει την εξής πολυπλοκότητα:

Πολυπλοκότητα χώρου: $O(n)$

Πολυπλοκότητα χρόνου: (α) $O(n^2)$ στη χειρότερη περίπτωση

(β) $O(n)$ αναμενόμενος χρόνος

Απόδειξη για το (α): όπως και πριν

Τυχαιοκρατικός Αυξητικός Αλγόριθμος

Απόδειξη για (b): Ορίζουμε τις 0/1 τυχαίες μεταβλητές $X(i) = \begin{cases} \mathbf{1} & \alpha\nu\ v_{i-1} \notin h_i \\ \mathbf{0} & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases} \quad i = 3 \ldots n$

Οι γραμμές 4-8 απαιτούν $O(i \cdot X(i) + 1)$ χρόνο. Άρα: $T = O(n) + \sum_{i=3}^{n} O(i) \cdot X(i)$

Αναμενόμενος χρόνος: $E[T] = O(n) + E\left[\sum_{i=3}^{n} O(i) \cdot X(i)\right] =$

$$= O(n) + \sum_{i=3}^{n} O(i) \cdot E[X(i)]$$

Γραμμικότητα μέσης τιμής

Οπισθόδρομη Ανάλυση

$$E[X(i)] = \Pr[v_{i-1} \notin h_i] \leq \frac{2}{i}$$

"Θέτουμε" $C(i) = \{ h_1, h_2\} \cup \underbrace{\{h_3, \ldots, h_i\}}_{\text{τυχαία}}$

Τυχαία : $C(i\text{-}1) = C(i) - \{h_i\}$

Το v_i ορίζεται από δύο h_j. Η πιθανότητα κάποιο από αυτά να είναι το h_i είναι $\leq 2/i$, που δεν εξαρτάται από το $C(i)$.

Επομένως : $E[T] \leq O(n) + \sum_{i=3}^{n} O(i) \cdot \frac{2}{i} = O(n).$