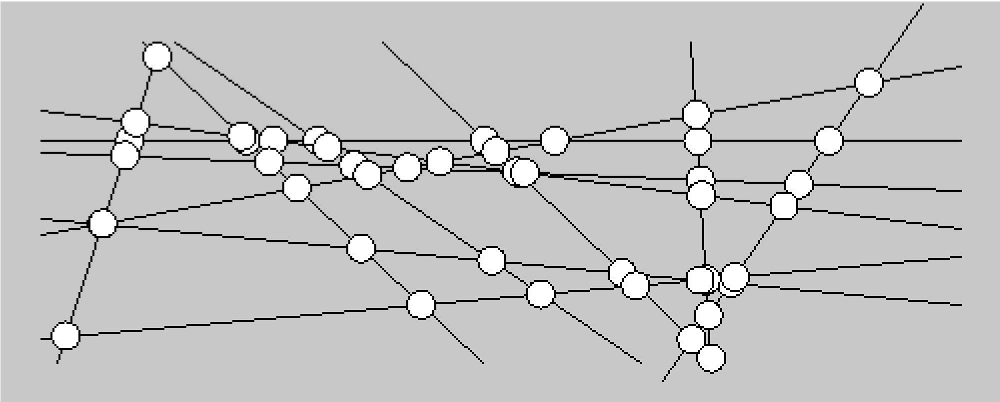
Υπολογιστική Γεωμετρία

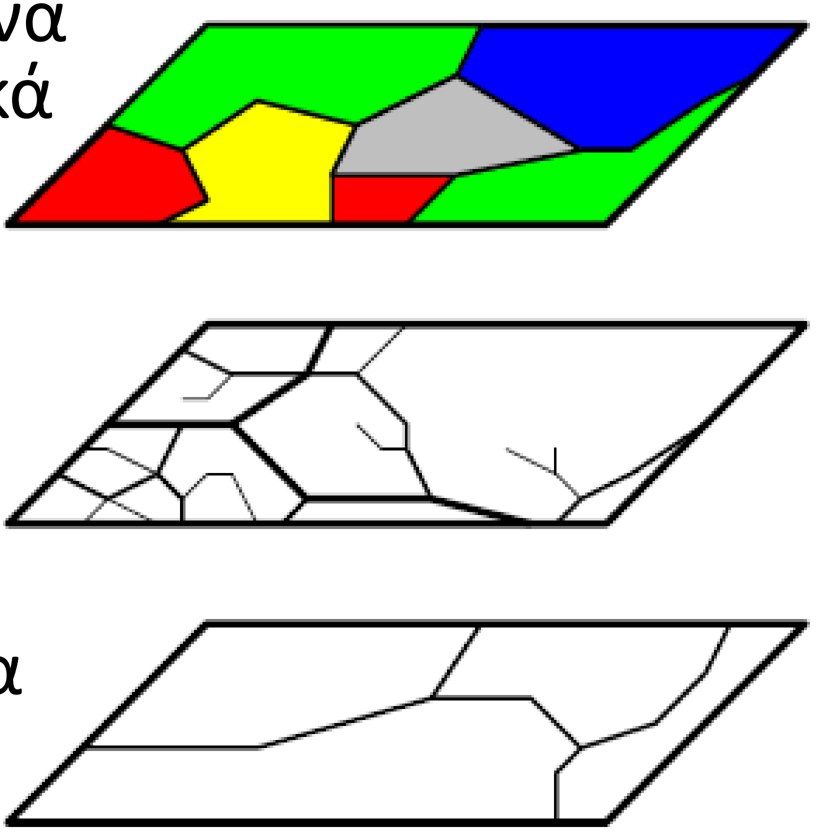
Τομές (Τμημάτων και Περιοχών)



Υπέρθεση Χαρτών

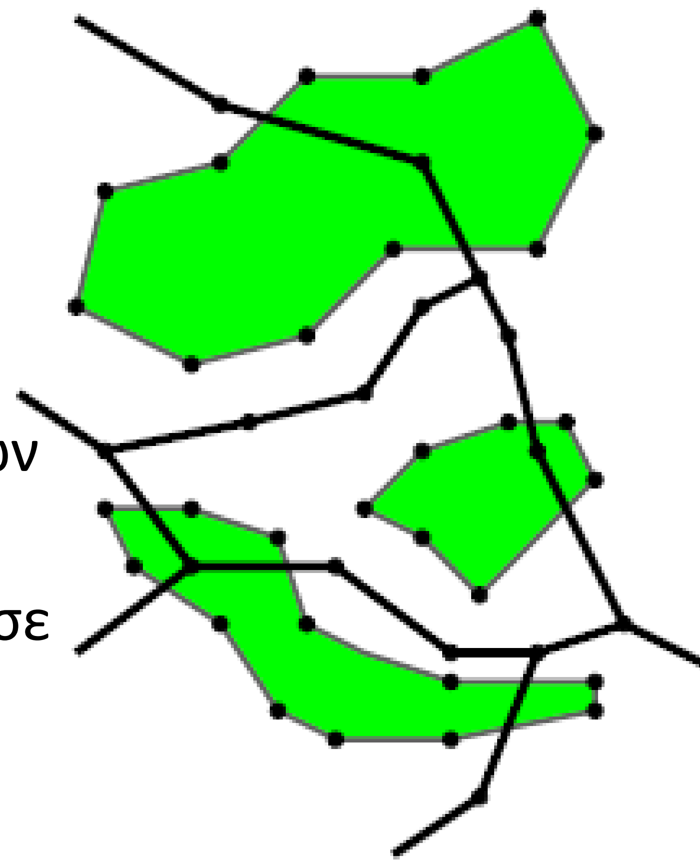
Σε ένα γεωγραφικό σύστημα πληροφορίας (GIS) τα δεδομένα αποθηκεύονται σε διαφορετικά στρώματα.

Ένα στρώμα είναι ένας θεματικός χάρτης, δηλαδή περιέχει πληροφορία συγκεκριμένου τύπου, π.χ. δρόμοι, πόλεις, δάση, ποτάμια κοκ.



Υπέρθεση Χαρτών

Η υπέρθεση χαρτών είναι ο συνδυασμός δύο ή περισσοτέρων στρωμάτων. Μπορούμε να απαντήσουμε ερωτήσεις όπως:



- Ποιο είναι το συνολικό μήκος δρόμων εντός του δάσους;
- Ποια είναι η καλλιεργήσιμη έκταση σε απόσταση 1 χλμ. από ένα ποτάμι;
- Πόσες πόλεις είναι σε απόσταση 10 χλμ. από λίμνες;

Υπέρθεση Χαρτών

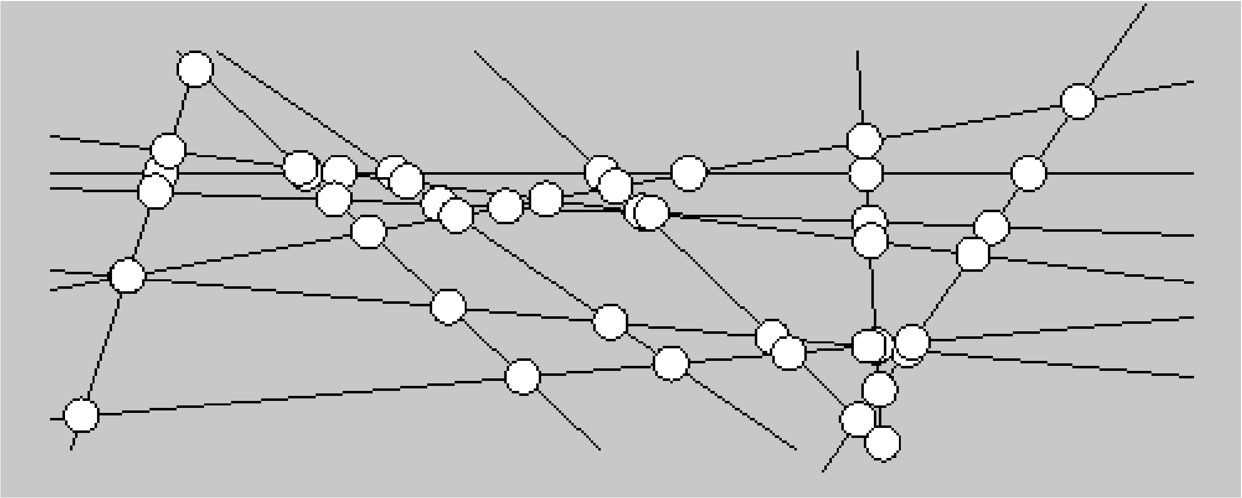
Για να λύσουμε το πρόβλημα της υπέρθεσης χαρτών θα χρειαστούμε τουλάχιστον να είμαστε σε θέση να υπολογίζουμε σημεία τομής από δύο σύνολα από ευθύγραμμα τμήματα (ή από σύνορα μεταξύ περιοχών)

Εφαρμογές

- Γραφικά: Απόκρυψη γραμμών/επιφανειών
- GIS
- Χαρτογραφία
- VLSI τοποθέτηση κυκλωμάτων
- κοκ.

Αναφορές:

- [CLRS] κεφάλαιο 33
- [M. de Berge et al] κεφάλαιο 2
- [Preparata-Shamos’85] κεφάλαιο 7
- [O’Rourke’98] κεφάλαιο 7



ΤΟΜΉ ΕΥΘΥΓΡΆΜΜΩΝ ΤΜΗΜΆΤΩΝ

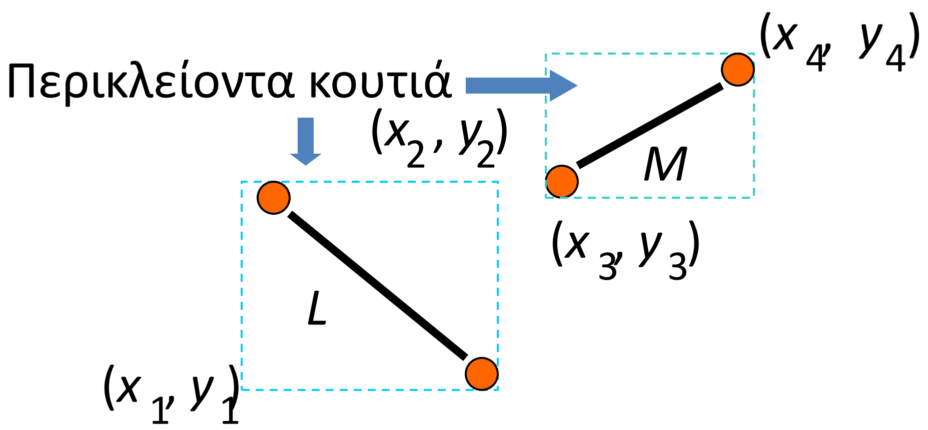
Πότε Τέμνονται Δύο Ευθύγραμμα Τμήματα;

Μία μέθοδος: λύση για σημείο τομής μεταξύ των ευθειών που περιέχουν τα τμήματα και έλεγχος αν αυτό το σημείο ανήκει και στα δύο τμήματα.

Στην πράξη, συχνά δύο τμήματα **δεν** τέμνονται.

Στάδιο 1: απορρίπτουμε αν τα περικλείοντα κουτιά δεν τέμνονται

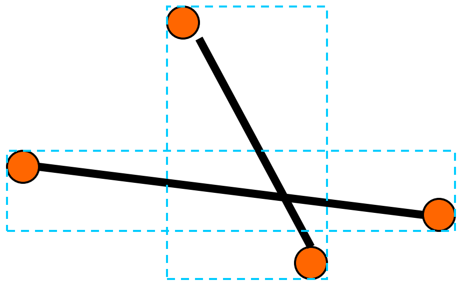
Το L δεξιά/αριστερά του *M*; *Το L* πάνω/κάτω του *M*;

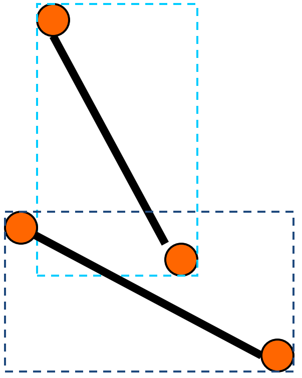


Περίπτωση 1: τα κουτιά δεν τέμνονται και άρα ούτε τα τμήματα.

Περικλείοντα Κουτιά

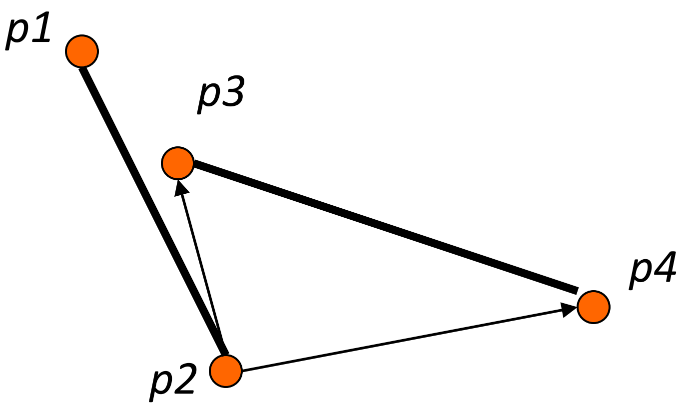
Περίπτωση 2: Τα κουτιά τέμνονται. Τα τμήματα μπορεί να τέμνονται αλλά μπορεί και όχι. Θα πρέπει να γίνει έλεγχος στο στάδιο 2.





Έλεγχος Τομής

Δύο ευθύγραμμα τμήματα **δεν** τέμνονται αν και μόνο αν το ένα τμήμα κείται αποκλειστικά στην μία πλευρά της γραμμής που περιέχει το άλλο τμήμα.



$$p_2p_3 \times p_2p_1 > 0$$

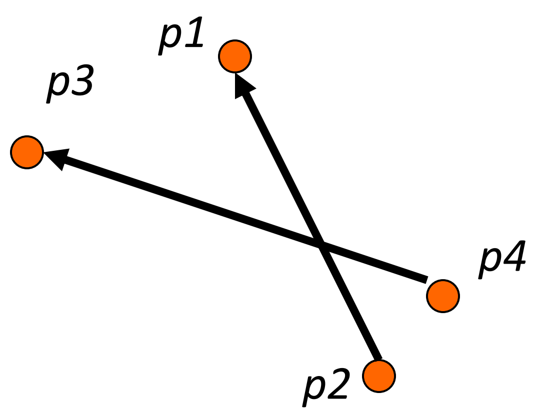
$$p_2p_4 \times p_2p_1 > 0$$

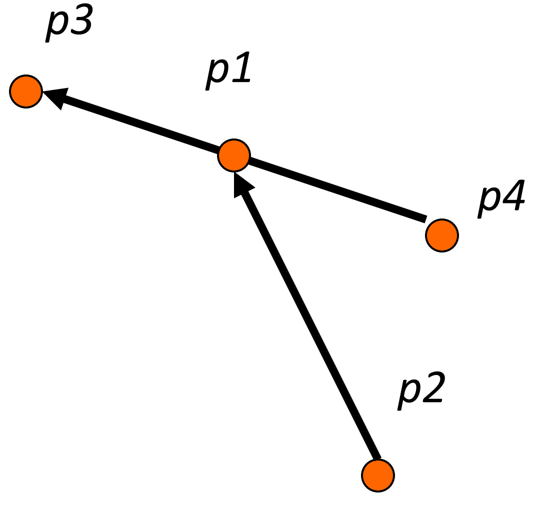
Έλεγχος Τομής

Δύο τμήματα τέμνονται αν και μόνο αν τα δύο παρακάτω ζεύγη εξωτερικών γινομένων είναι ετερόσημα (ή ένα είναι 0)

$p_4p_1 \times p_4p_3$ και $p_4p_2 \times p_4p_3$ και

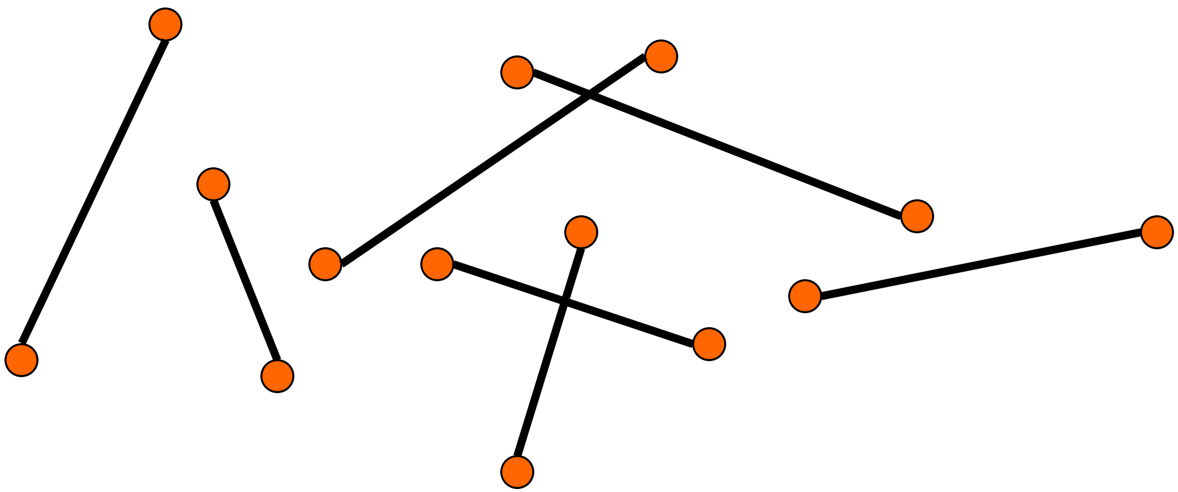
$p_2p_3 \times p_2p_1$ και $p_2p_4 \times p_2p_1$





n Ευθύγραμμα Τμήματα

Είσοδος: ένα σύνολο *n* τμημάτων στο επίπεδο.
Έξοδος: όλες οι τομές, και για κάθε τομή τα αντίστοιχα ευθύγραμμα τμήματα.



Το Πρόβλημα της Τομής Ευθ. Τμημάτων

Δοθέντος ενός συνόλου L={ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ } από *n* ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο, ανέφερε όλες τις τομές στο L. (αντίστοιχο πρόβλημα μέτρησης;)

- Απλοϊκή μέθοδος: έλεγχος κάθε ζεύγους στο L σε $O(n^2)$ χρόνο.

- Εξοδοεξαρτώμενος (output sensitive);

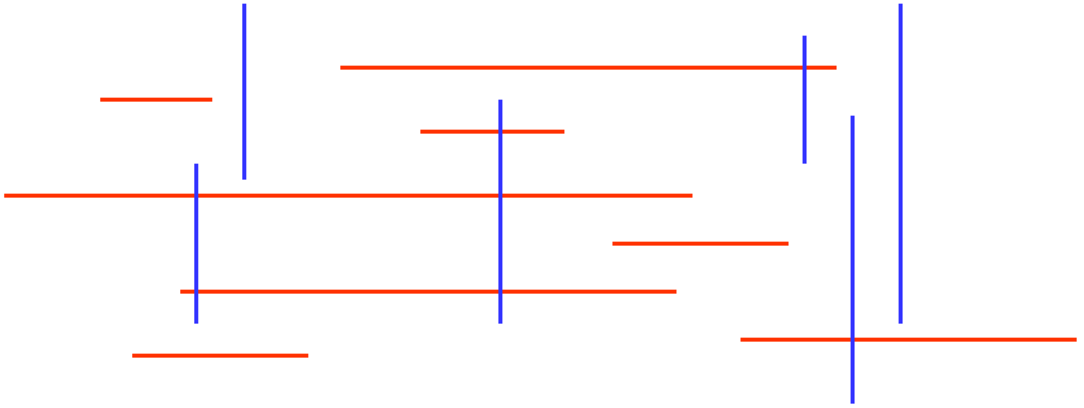
- Έστω *R* το συνολικό πλήθος τομών, όπου $0 \leq R \leq \Theta(n^2)$.

  - $O(n \log n)$ χρόνος για μέτρηση
  - $O(R + n\log n)$ χρόνος για αναφορά (δεν θα το κάνουμε)

Θα ξεκινήσουμε πρώτα με μία άσκηση...

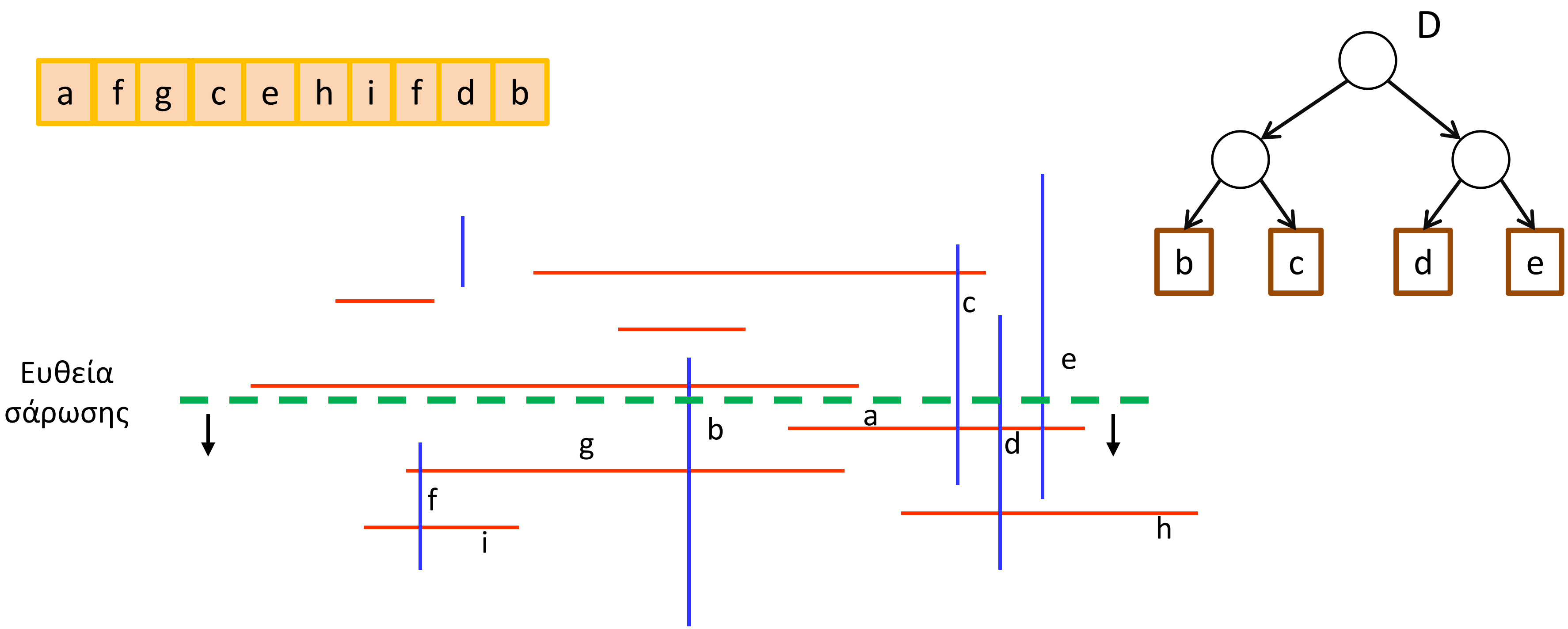
Ειδική Περίπτωση : Ορθογώνιο L

Έστω ότι τα τμήματα L είναι αποκλειστικά κάθετα (μπλε) ή οριζόντια (κόκκινα), και κάθε τομή είναι μεταξύ κόκκινου-μπλε ζεύγους.



π.χ. VLSI

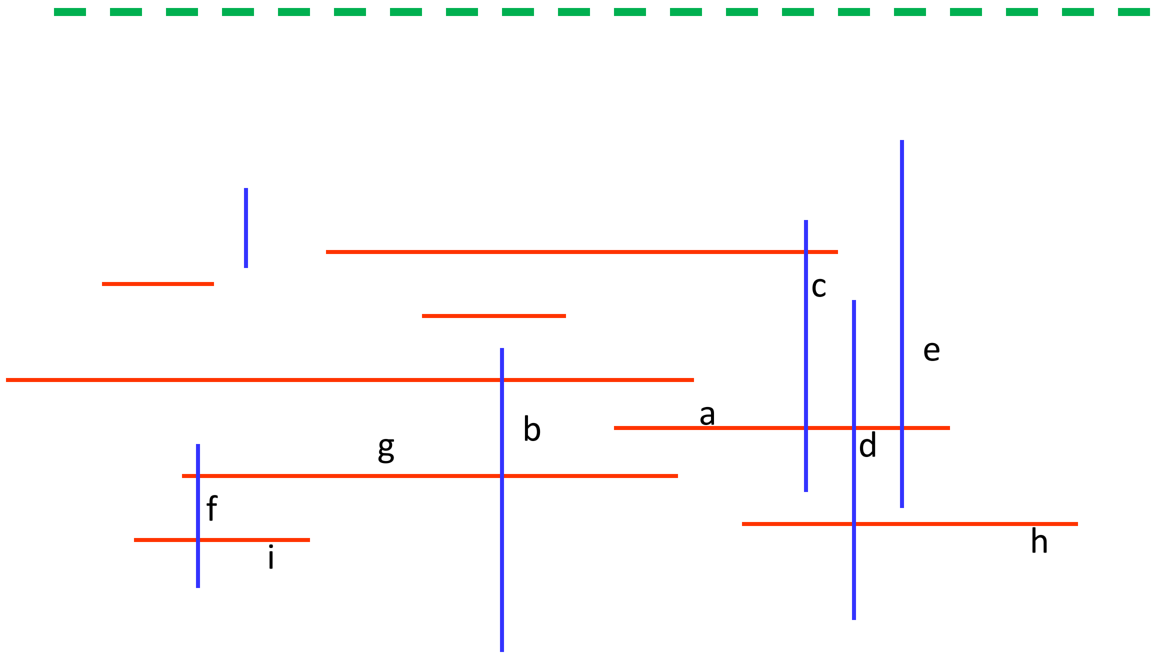
Ορθογώνιο *L*



Μέθοδος Επίπεδης Σάρωσης: οριζόντια ευθεία σάρωσης από πάνω προς τα κάτω.

- Ενεργά τμήματα: κάθετα τμήματα που τέμνουν την ευθεία σάρωσης.
- Ουρά συμβάντων: ταξινομημένα ως προς *y* τα άκρα των διαστημάτων (2 για κάθε μπλε, 1 για κάθε κόκκινο).
- Κατάσταση σαρωτικής ευθείας: ταξινομημένα ως προς *x* τα ενεργά τμήματα σε ένα αποδοτικό λεξικό *D*.

Ορθογώνιο *L*



Αλγόριθμος Ορθογώνια-Τομή(L)

Q ← {ταξινομημένα ως προς *x* άκρα των L} — Ουρά συμβάντων σάρωσης

D ← ∅ — Κατάσταση Σάρωσης

for κάθε συμβάν (p,s) ∈ Q **do** — $O(n)$ επαναλήψεις

  if p είναι πάνω άκρο του s **then** Insert (s,D) — $O(\log n)$ χρόνος

  if p είναι κάτω άκρο του s **then** Delete (s,D) — $O(\log n)$ χρόνος

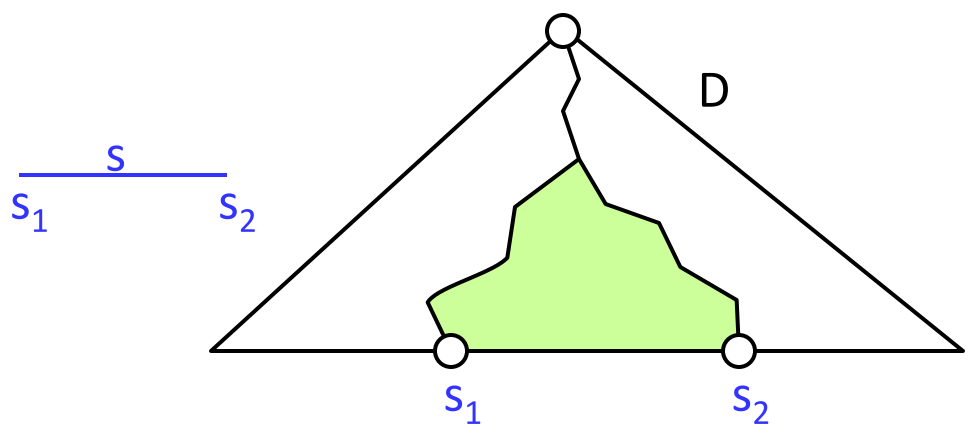
  if s οριζόντιο **then** RangeReport (s,D) — $O(R_s + \log n)$ χρόνος

end

RangeReport (s,D)

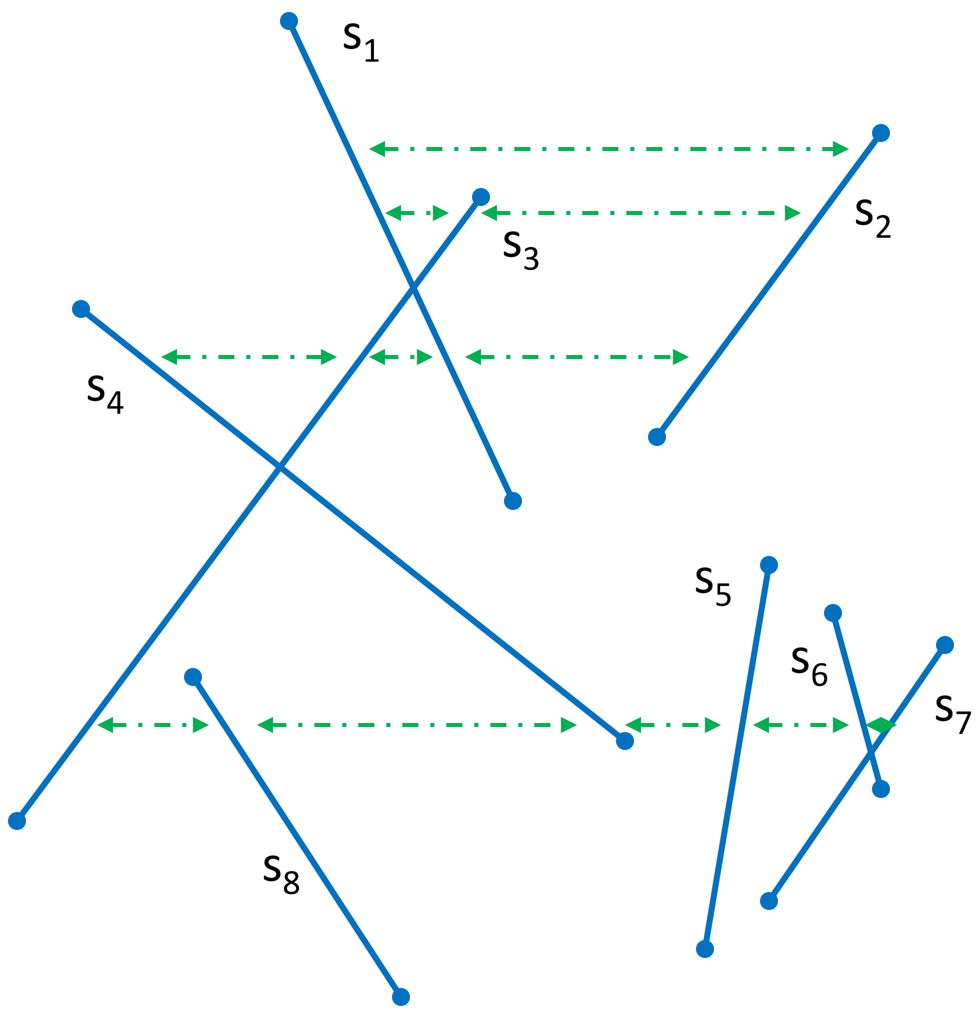
O(R_s+ log$n$) χρόνος

R_s = # ∩ με s



Συνολικός χρόνος = $O(n\log n + \sum_s (R_s + \log n)) = O(R + n\log n)$.

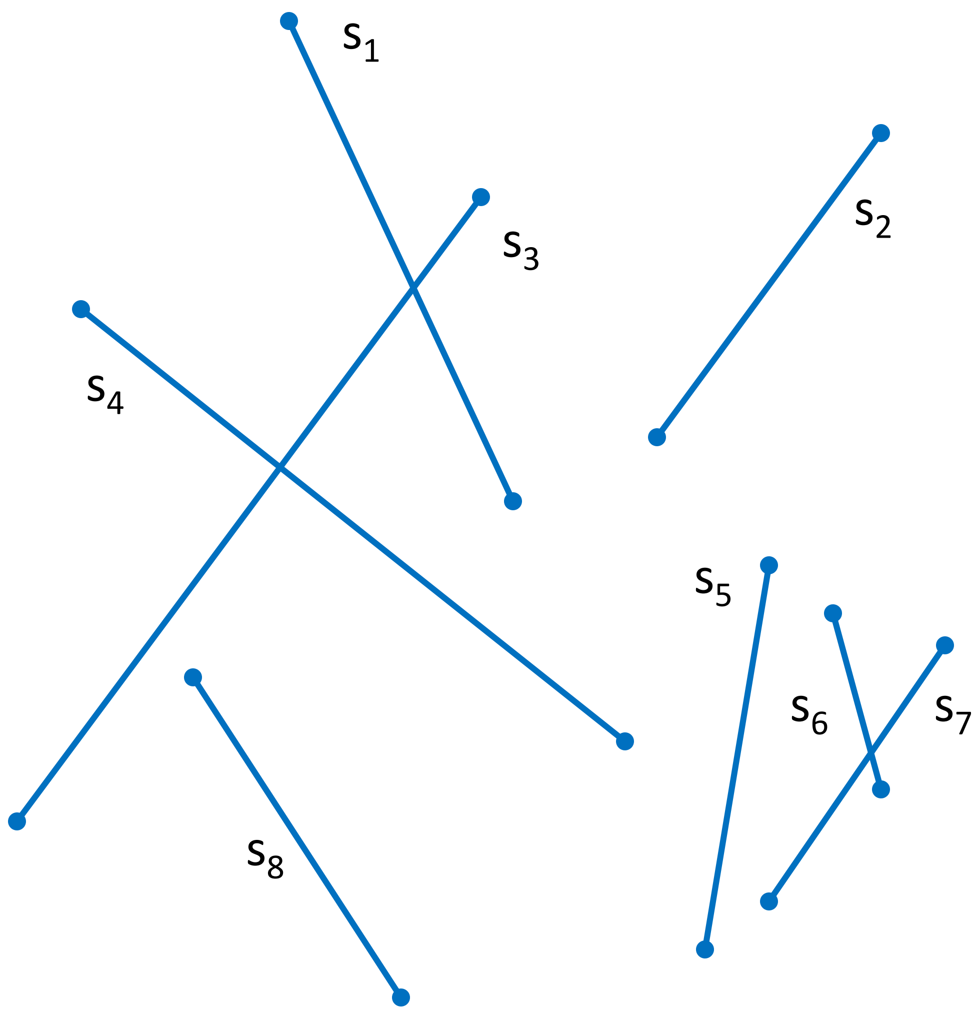
Πίσω στη Γενική Περίπτωση



Παρατήρηση:

Δύο τμήματα μπορούν να τέμνονται αν επικαλύπτονται ως προς την y-συντεταγμένη και είναι γειτονικά ως προς τη x-συντεταγμένη σε αυτή τη y-συντεταγμένη.

Εκφυλισμοί



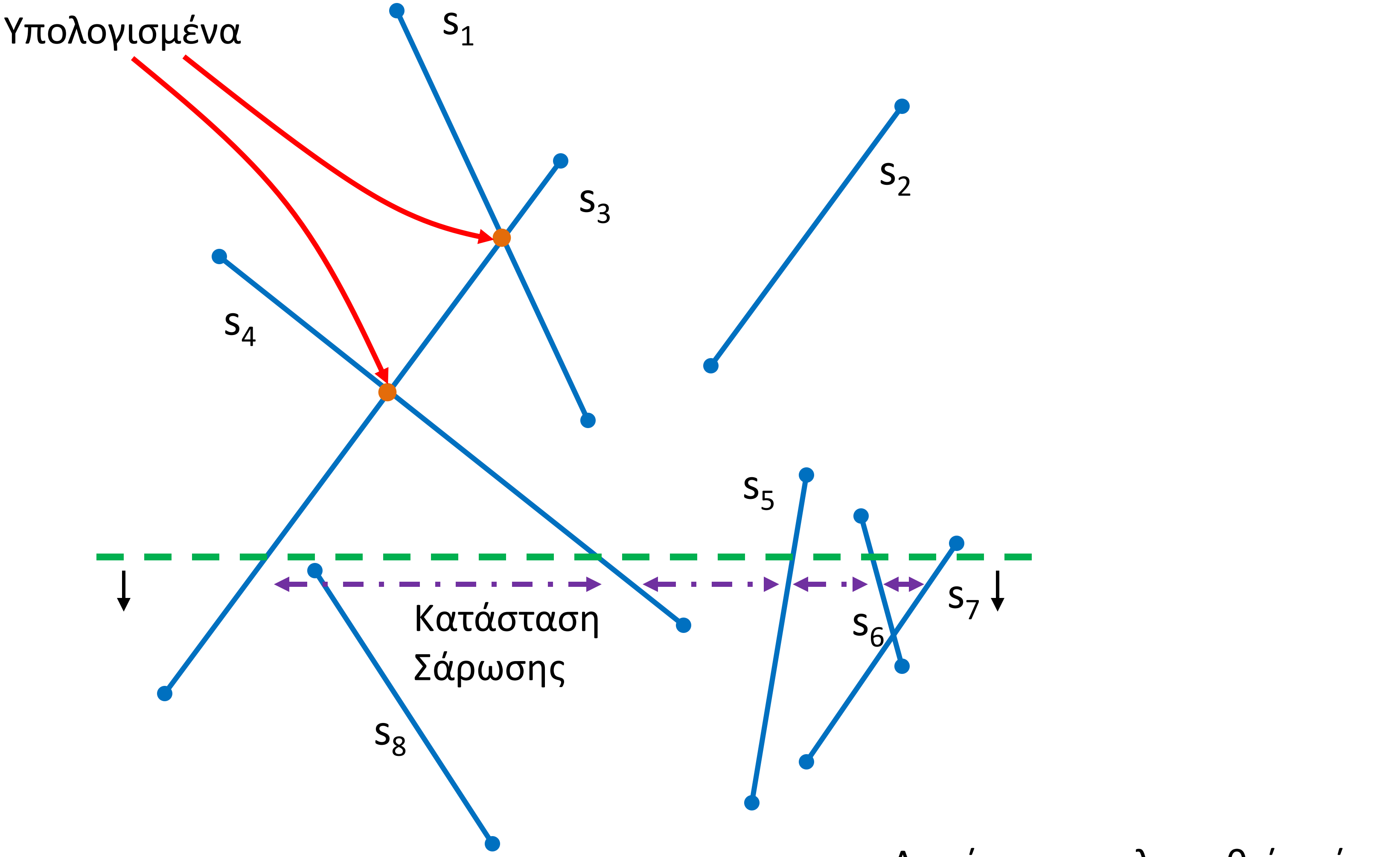
Εκφυλισμοί:

1. Κανένα τμήμα δεν είναι οριζόντιο

2. Δύο οποιαδήποτε τμήματα τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο

3. Δεν υπάρχει τριάδα τμημάτων που να τέμνονται σε κοινό σημείο

Σάρωση



Υπολογισμένα
s_1
s_2
s_3
s_4
s_5
s_6
s_7
s_8
Κατάσταση
Σάρωσης
Δεν έχουν υπολογισθεί ακόμα

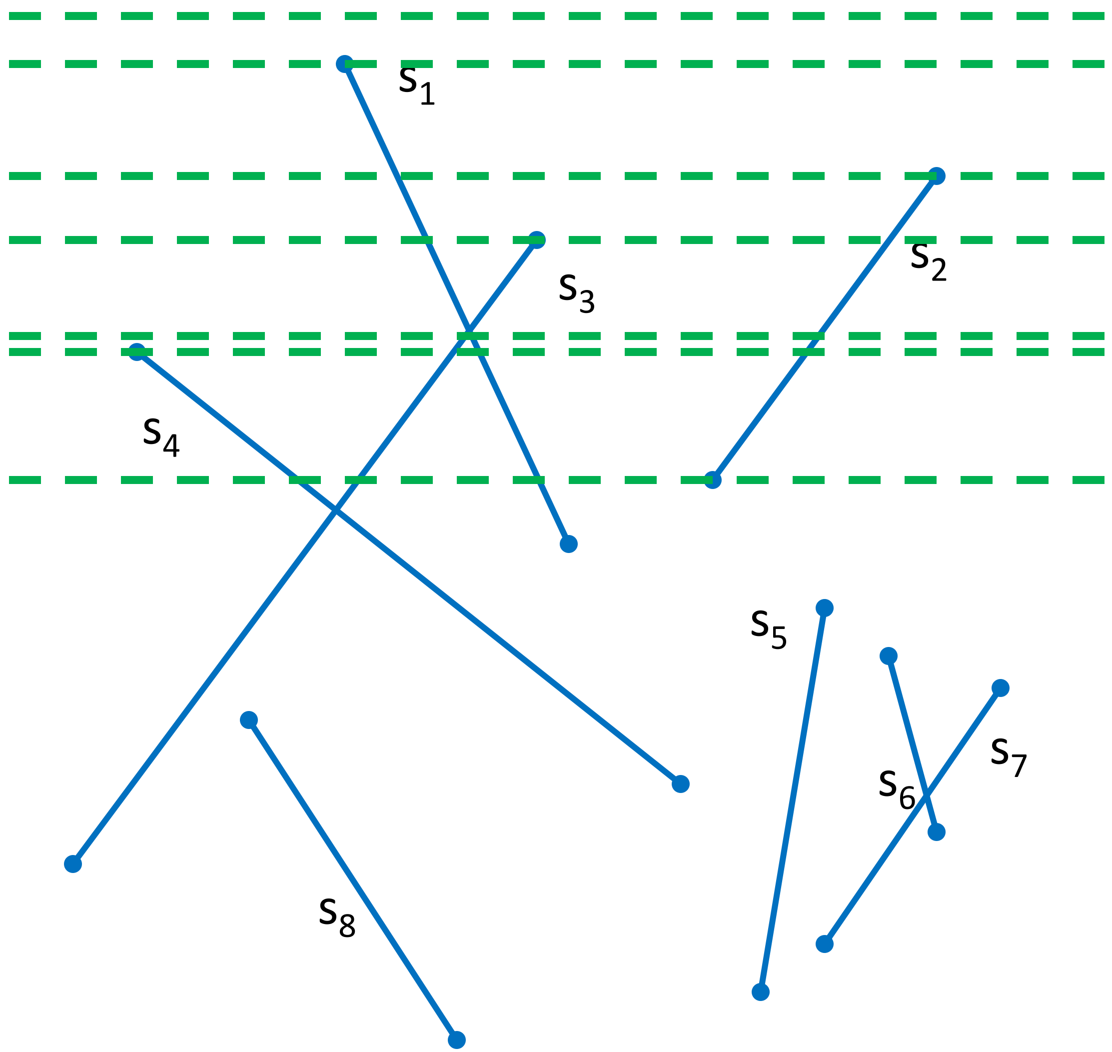
Κατάσταση Σάρωσης και Συμβάντα

Η κατάσταση της ευθείας σάρωσης στην τρέχουσα θέση της ευθείας είναι το σύνολο των τμημάτων που τέμνουν την ευθεία σάρωσης διατεταγμένα από αριστερά προς τα δεξιά.

Τα συμβάντα συμβαίνουν όταν μεταβάλλεται η κατάσταση και παράγεται έξοδος.

συμβάν ≈ y-συντεταγμένη όπου κάτι ενδιαφέρον συμβαίνει

Σάρωση



Πρόσθεση s_1

Πρόσθεση s_2

Πρόσθεση s_3

Αναφορά τομής s_1 και s_3

Πρόσθεση s_4

Αφαίρεση s_2 κοκ.

Συμβάντα

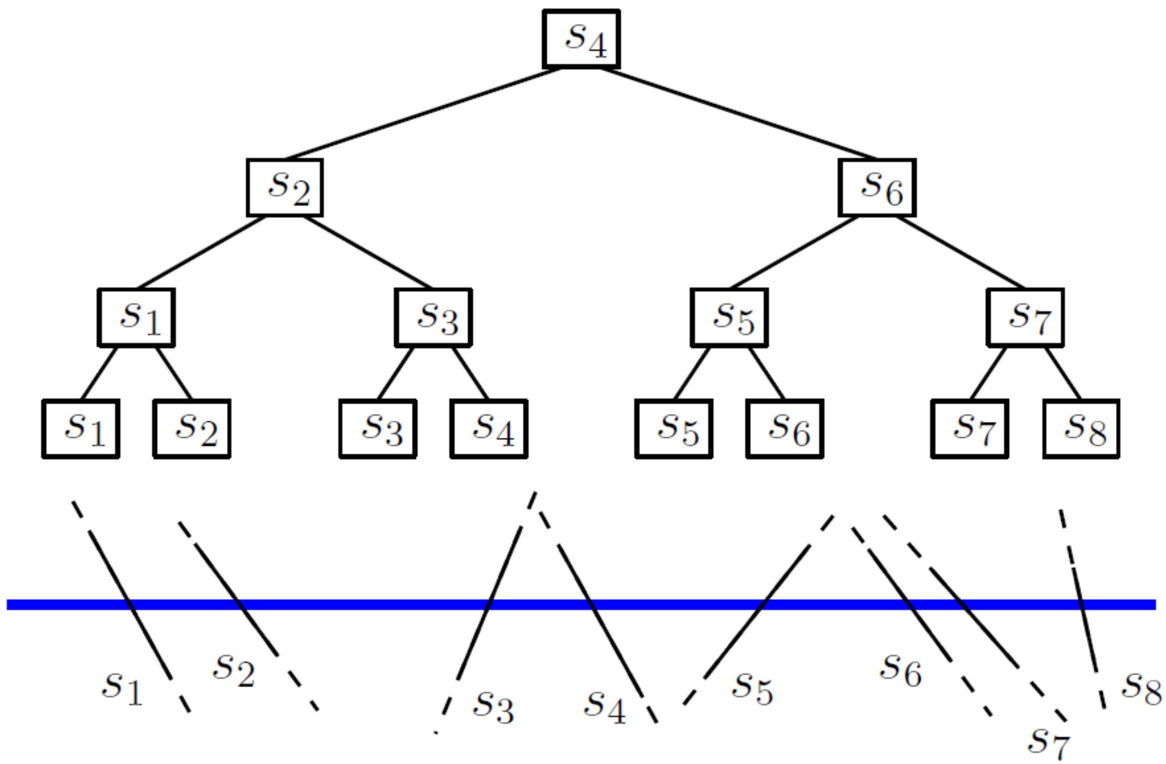
Ένα συμβάν υπάρχει όταν η ευθεία σάρωσης είναι:

- ένα πάνω άκρο του ευθύγραμμου τμήματος
- ένα κάτω άκρο του ευθύγραμμου τμήματος
- ένα σημείο τομής

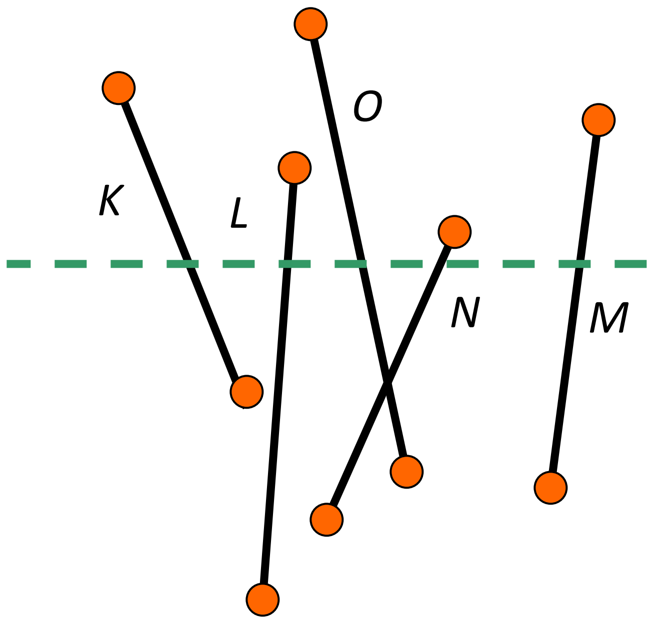
Σε κάθε περίπτωση η κατάσταση μεταβάλλεται. Στην τρίτη περίπτωση μάλιστα παράγουμε και έξοδο.

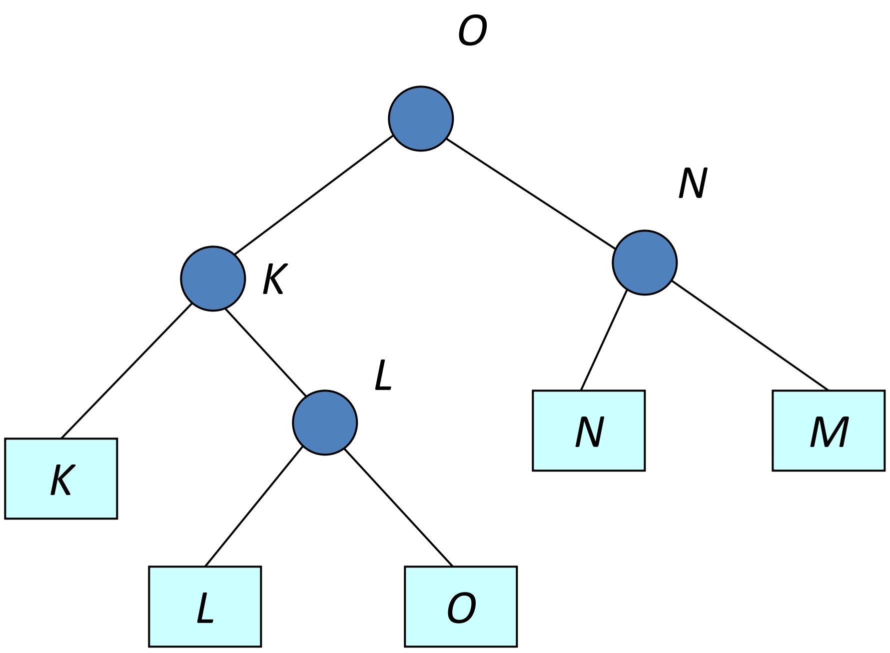
Καταστασιακή Δομή

Χρησιμοποιούμε ένα ζυγισμένο δυαδικό δένδρο με τα ευθύγραμμα τμήματα στα φύλλα ως τη καταστασιακή δομή.



Παράδειγμα





Καταστασιακή δομή

Συμβάντα και Αλλαγή Κατάστασης

- ένα πάνω άκρο του ευθύγραμμου τμήματος
  - Ένθεση του νέου τμήματος στην δομή
- ένα κάτω άκρο του ευθύγραμμου τμήματος
  - διαγραφή του υπάρχοντος τμήματος από δομή
- ένα σημείο τομής
  - ανταλλαγή δύο γειτονικών φύλλων

Εύρεση Συμβάντων

Πριν την εκκίνηση του αλγορίθμου σάρωσης γνωρίζουμε όλα τα συμβάντα που αντιστοιχούν σε πάνω και κάτω άκρα διαστημάτων.

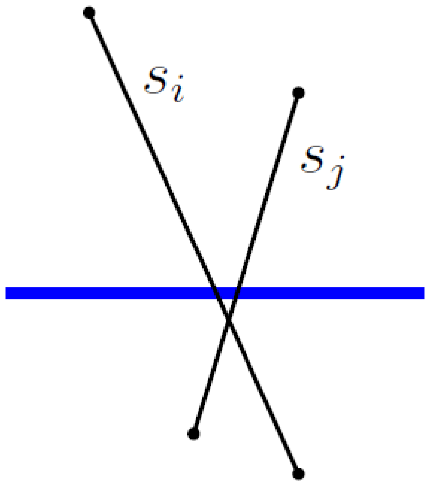
Πώς όμως βρίσκουμε τα συμβάντα που αντιστοιχούν σε σημεία τομής;

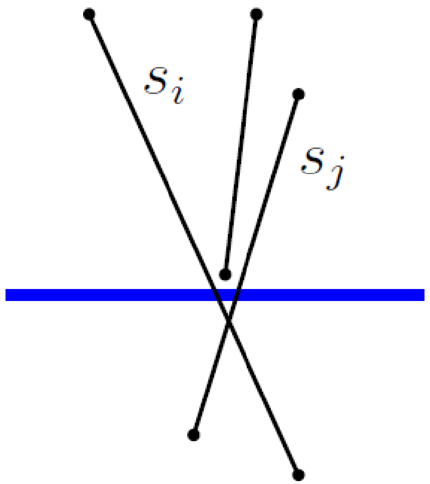
Δύο ευθύγραμμα τμήματα τέμνονται μόνο όταν είναι οριζόντιοι γείτονες.

Εύρεση Συμβάντων

Λήμμα: Δύο ευθύγραμμα τμήματα s_i and s_j τέμνονται μόνο μετά αφού γίνουν οριζόντιοι γείτονες.

Απόδειξη: Φανταστείτε ότι η ευθεία σάρωσης είναι μόλις πιο πάνω από το σημείο τομής του s_i και s_j, αλλά κάτω από κάθε άλλο συμβάν.





Ουρά Συμβάντων

Η Ουρά Συμβάντων είναι ένα ζυγισμένο δυαδικό δένδρο αφού κατά τη διάρκεια της σάρωσης ανακαλύπτουμε νέα συμβάντα που θα γίνουν αργότερα.

Γνωρίζουμε τα συμβάντα των άκρων εκ των προτέρων αλλά βρίσκουμε τα συμβάντα των τομών όταν τα αντίστοιχα τμήματα είναι οριζοντίως γειτονικά.

Δομή Αλγορίθμου

Αλγόριθμος ΕύρεσηΣημείωνΤομής(S)

Είσοδος: Ένα σύνολο S τμημάτων στο επίπεδο.

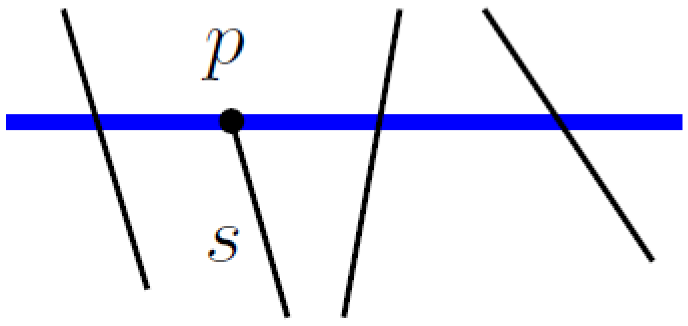
Έξοδος: Τα σημεία τομής μεταξύ των τμημάτων του S, και τα τμήματα που τα αποτελούν.

1. Κενή ουρά συμβάντων Q. Ένθεση των άκρων των τμημάτων του S μαζί με τα αντίστοιχα τμήματα για το άνω άκρο.
2. Αρχικοποίηση της καταστασιακής δομής T
3. **ενόσω** η Q δεν είναι άδεια
4.   **do** καθόρισε το επόμενο συμβάν p στο Q και διέγραψέ το
5.   ΧειρισμόςΣημείουΣυμβάντος(p)

Χειρισμός Συμβάντων

Αν ένα συμβάν αναφέρεται σε άνω άκρο τότε:

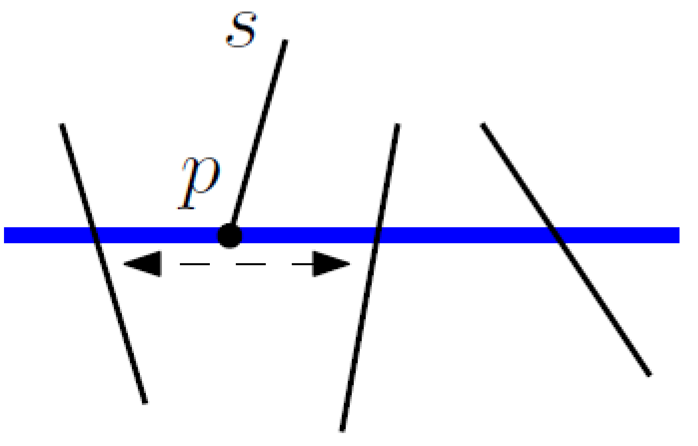
1. Αναζήτησε p στο T, και ένθεσε το s
2. Αν το s τέμνει τον αριστερό γείτονα στο T, τότε καθορίζουμε το σημείο τομής και το ενθέτουμε στην Q
3. Αν η s τέμνει τον δεξιό γείτονα στο T, τότε καθόρισε το σημείο τομής και ένθεσέ το στην Q



Χειρισμός Συμβάντων

Αν το συμβάν είναι ένα κάτω άκρο τότε:

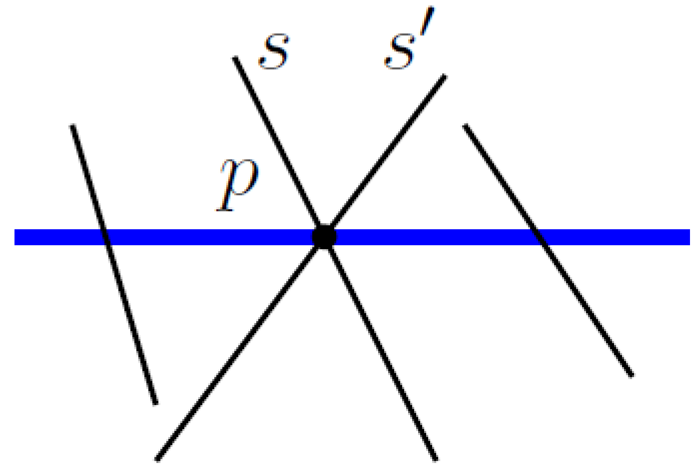
1. Αναζήτησε το p στο T, και διέγραψε το s
2. Έστω s_l και s_r ο αριστερός και ο δεξιός γείτονας του s στο T (πριν τη διαγραφή). Αν τέμνονται κάτω από την ευθεία σάρωσης, τότε ένθεσε το σημείο τομής ως συμβάν στην Q



Χειρισμός Συμβάντων

Αν το συμβάν είναι ένα σημείο τομής τότε:

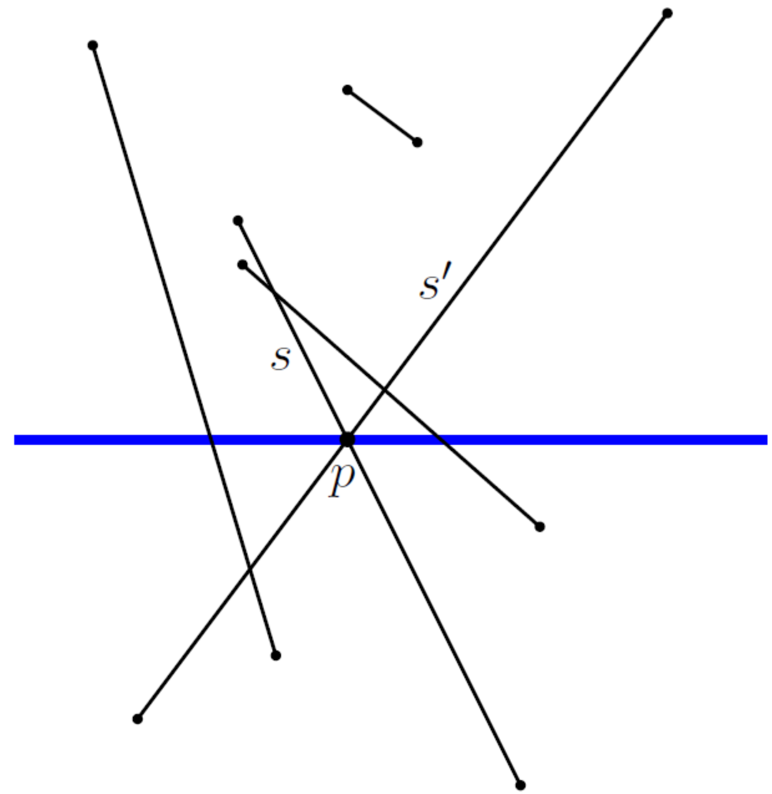
1. Αντάλλαξε τα s και s΄ στο T
2. Αν το s΄ και ο νέος αριστερός του γείτονας στο T τέμνονται κάτω από την ευθεία σάρωσης τότε ένθεσέ το σημείο τομής στην Q
3. Αν το s και ο νέος δεξιός του γείτονας στο T τέμνονται κάτω της ευθείας σάρωσης τότε ένθεσε το σημείο τομής στην Q
4. Ανέφερε το σημείο τομής



Αποσαφηνίσεις…

1. Μπορεί να συμβαίνει ότι δύο νέοι γείτονες να έχουν ήδη σημείο τομής πάνω από την ευθεία σάρωσης;

2. Μπορεί να συμβεί να ενθέσουμε ένα συμβάν στην Q που να έχει ήδη εντεθεί;



Απόδοση

Πόσος χρόνος απαιτείται για ένα συμβάν;

1. Το πολύ μία αναζήτηση στο T και/ή μία ένθεση, διαγραφή ή ανταλλαγή
2. Εύρεση το πολύ δύο γειτόνων στο T
3. Το πολύ μία διαγραφή και δύο ενθέσεις στην Q

Αφού τα T και Q είναι ζυγισμένα δυαδικά δένδρα, ο χειρισμός κάθε συμβάντος απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο

Πλήθος Συμβάντων

- $2n$ για τα κάτω και άνω άκρα
- k για το πλήθος των σημείων τομής, αν υπάρχουν k συνολικά σημεία τομής

Συνολικά: $O(n+k)$ συμβάντα

Απόδοση

Η αρχικοποίηση απαιτεί $O(n\log n)$ χρόνο (τοποθέτηση όλων των άνω και κάτω άκρων στην Q)

Κάθε ένα από τα $O(n+k)$ συμβάντα απαιτεί $O(\log n)$ χρόνο

Άρα ο αλγόριθμος απαιτεί $O((n+k)\log n)$ χρόνο

Αν $k = O(n)$, τότε $O(n\log n)$. Αν το k είναι τεράστιο τότε ο $O(n^2)$ αλγόριθμος είναι πιο αποδοτικός

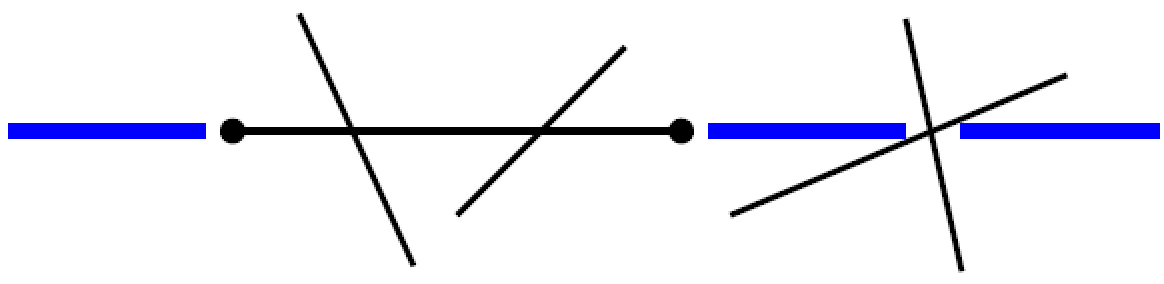
Χώρος;;;

Η ουρά συμβάντων Q μπορεί να αποθηκεύει $O(n+k)$ συμβάντα, δηλαδή $O(n^2)$. Πώς πετυχαίνω $O(n)$ χώρο;

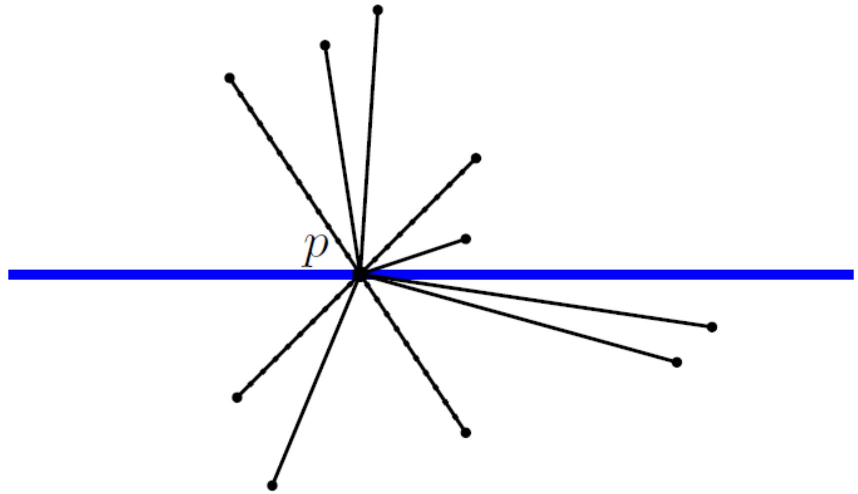
Απάντηση: αποθήκευση των συμβάντων που αφορούν τομές μόνο μεταξύ γειτονικών κάθε φορά τμημάτων.

Εκφυλισμοί

Για δύο διαφορετικά συμβάντα με ίδια y-συντεταγμένη, τα αντιμετωπίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά: το «άνω» άκρο ενός οριζόντιου τμήματος θα είναι το αριστερό άκρο.



Εκφυλισμοί



Έστω *U*(*p*) και *L*(*p*) τα ευθύγραμμα τμήματα που έχουν το *p* ως άνω και κάτω άκρο αντίστοιχα, ενώ το *C*(*p*) είναι το σύνολο των τμημάτων που εμπεριέχουν το *p*

Τι Αναφέρουμε;

Πόσο αποδοτικά διαχειριζόμαστε αυτή την περίπτωση;

Αν $|U(p)|+|L(p)|+|C(p)| = m$, τότε το συμβάν απαιτεί $O(m\log n)$ χρόνου.

Τι αναφέρουμε;

- Το σημείο τομής
- Κάθε ζεύγος από τεμνόμενα τμήματα
- Το σημείο τομής και κάθε τμήμα που συμμετάσχει

Το μέγεθος της εξόδου για αυτό το συμβάν είναι $O(1)$, $O(m^2)$ ή $O(m)$ αντίστοιχα.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\Sigma m=O(n+I)$, όπου I το πλήθος των τομών. Άρα ο αλγόριθμος απαιτεί $O((n+I)\log n)$ χρόνο.

Μέθοδος Σάρωσης

Για κάθε αλγόριθμο σάρωσης:

- Ορίζουμε την κατάσταση
- Επιλογή της καταστασιακής δομής και της ουράς συμβάντων
- Διαχείριση συμβάντων
- Για την ανάλυση, θα πρέπει να καθορίσουμε το πλήθος των συμβάντων και πόσο χρόνο απαιτούν

Τέλος, ασχολούμαστε με τους εκφυλισμούς

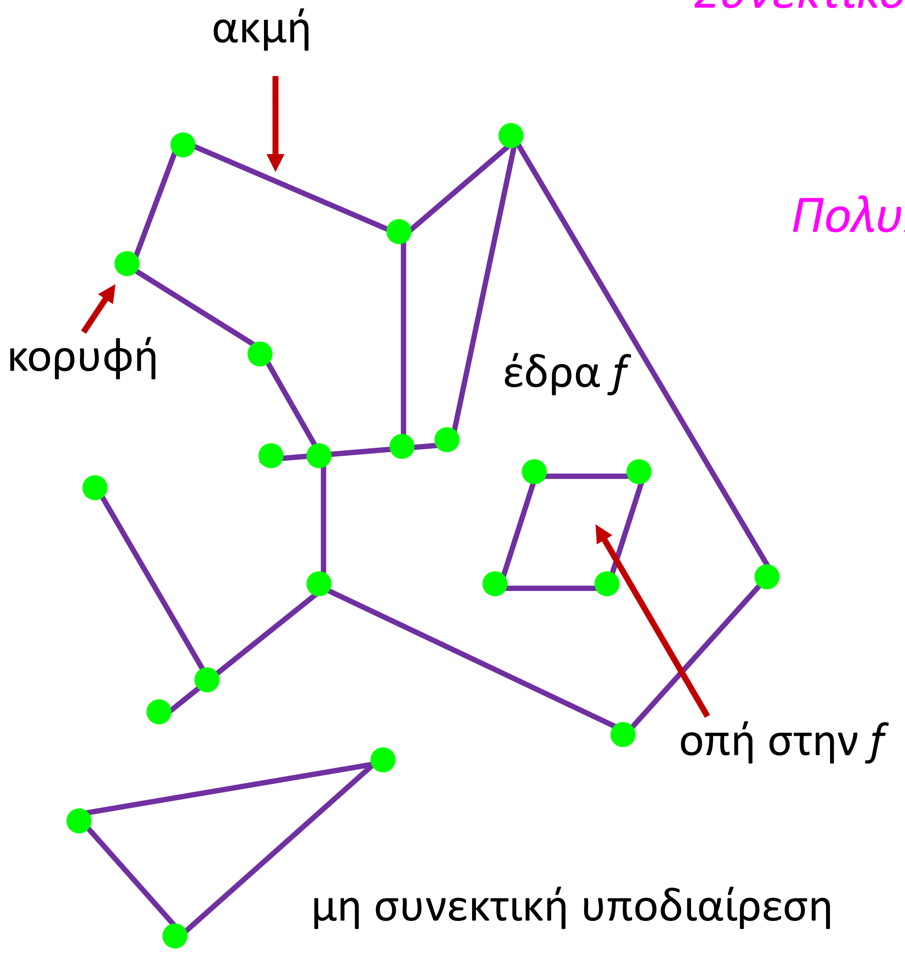
Μόνο τον τρόπο αποθήκευσης θα δούμε…

ΕΠΊΠΕΔΕΣ ΥΠΟΔΙΑΙΡΈΣΕΙΣ

Επίπεδη Υποδιαίρεση

Ορίζονται από επίπεδες εναποτυπώσεις γραφημάτων.

Συνεκτικό αν το αντίστοιχο γράφημα είναι συνεκτικό.



Πολυπλοκότητα = #κορυφών + #ακμών + #εδρών

Τυπικές πράξεις:

- Διαπέραση του συνόρου μίας έδρας
- Προσπέλαση έδρας από μία γειτονική της διαμέσου της κοινής τους ακμής
- Προσπέλαση όλων των ακμών που πρόσκεινται σε μία κορυφή.

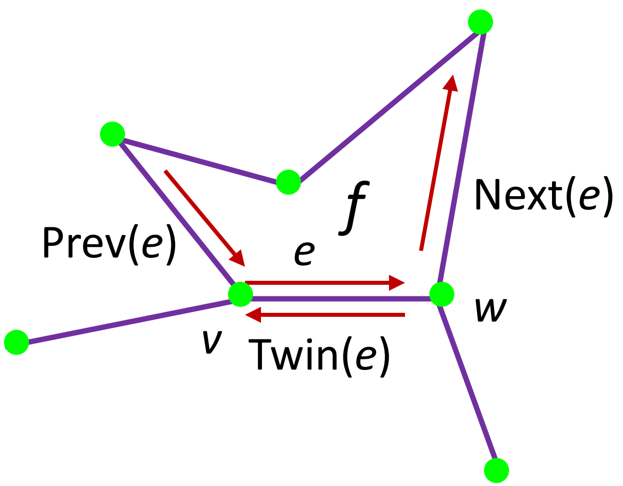
Διπλοσυνδεδεμένος Κατάλογος Ακμών

Αποθήκευση γεωμετρικής και τοπολογικής πληροφορίας.

Για διαπέραση συνόρου έδρας με αντιωρολόγια φορά έχουμε:

- έναν δείκτη στην επόμενη ακμή
- έναν δείκτη στην προηγούμενη ακμή

Κάθε ακμή έχει 2 διαφορετικές ημιακμές (*δίδυμες*) με αντίθετη φορά.



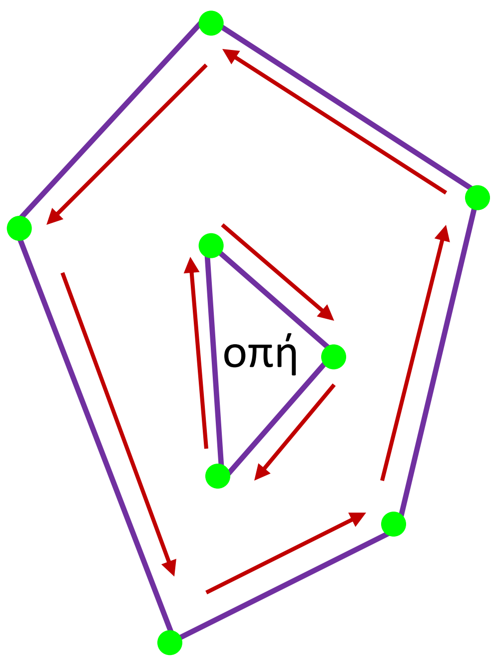
Η ακμή *e* έχει *αφετηρία* *v* και *απόληξη* *w*.
Η ακμή Twin(*e*) έχει αφετηρία *w* και απόληξη *v*.

- Για κάθε έδρα *f* αποθήκευσε έναν δείκτη σε μία αυθαίρετη ημιακμή στο σύνορό της.

Από αυτή την ημιακμή διαπέρασε το σύνορο της έδρας με αντιωρολόγια φορά μέσω της επόμενης.

Αν δεν υπάρχει οπή τότε όλα είναι ΟΚ.

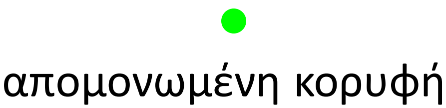
Οπές



Οι ακμές στο σύνορο μίας οπής διατρέχονται με ωρολόγια φορά ώστε η έδρα να είναι πάντα αριστερά.

Μία έδρα πάντα κείται αριστερά από κάθε ημιακμή στο σύνορό της.

Για να διατρέξουμε την έδρα, χρειαζόμαστε *έναν δείκτη σε μία ημιακμή από το εξωτερικό σύνορό της και έναν δείκτη σε κάθε εσωτερικό σύνορο.*



Χρειαζόμαστε έναν δείκτη σε κάθε απομονωμένη κορυφή της έδρας.

Δομή του Διπλοσυνδεδεμένου Καταλόγου

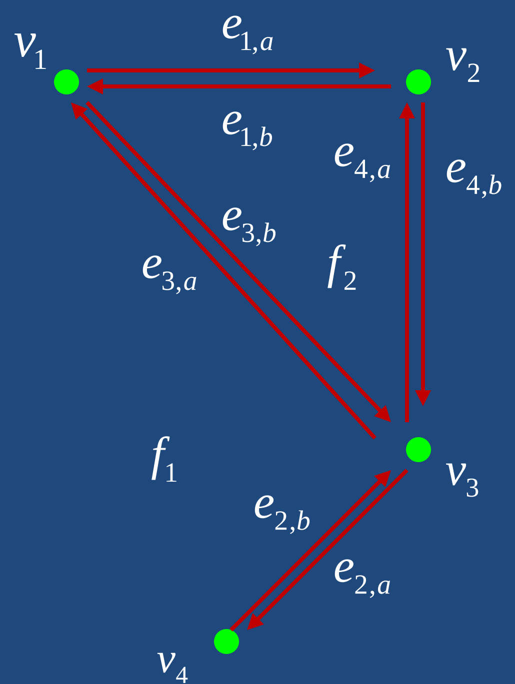
- Κάθε κορυφή *v* // O(1) πληροφορία
  - Συντεταγμένες(*v*)
  - ΠροσπίπτουσαΑκμή(*v*) – δείκτης σε αυθαίρετη ημιακμή με αφετηρία την *v*.

// η πληροφορία εξαρτάται από # εσωτερικών συνιστωσών.

- Κάθε έδρα *f* // κάθε ακμή δείχνεται το πολύ μία φορά από τον // κατάλογο Έσω-Συνιστώσες.
  - ΈξωΣυνιστώσα(*f*) – δείκτης σε κάποια ημιακμή του εξωτερικού συνόρου
  - Έσω Συνιστώσες(*f*) – ένας κατάλογος δεικτών προς ημιακμές στο σύνορο κάθε μίας από τις οπές της έδρας.
- Κάθε ακμή *e* // O(1) πληροφορία
  - Αφετηρία(*e*)
  - Δίδυμη(*e*)
  - Επόμενη(*e*)
  - Προηγούμενη(*e*)

Συνολικός χώρος: *O*(#κορυφές + #ακμές + #έδρες)

Παράδειγμα



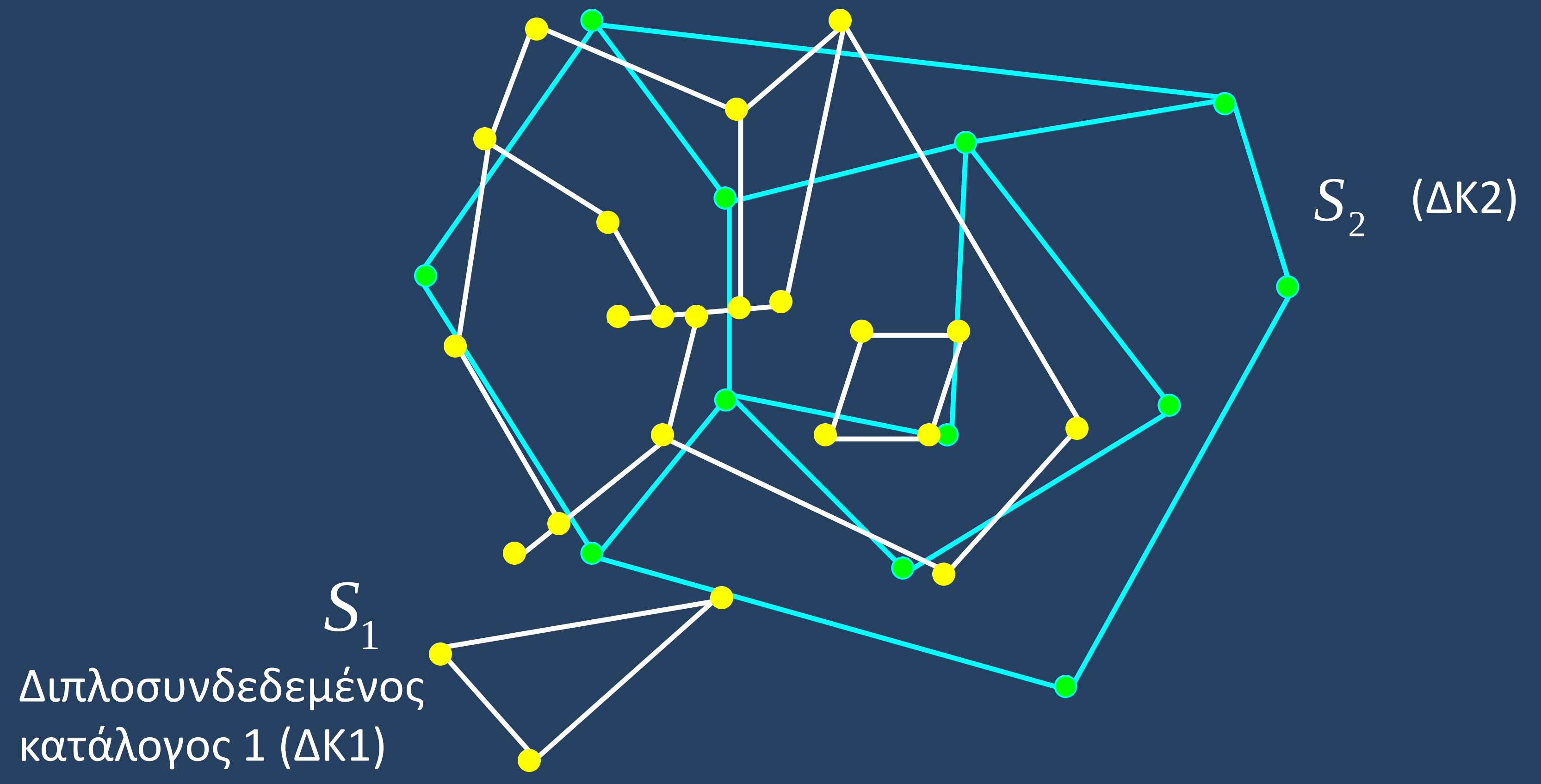
Έδρα	ΈξωΣυνιστώσα	ΈσωΣυνιστώσες
f_1	nil	$e_{1,a}$
f_2	$e_{4,a}$	nil

Ημιακμή	Αφετηρία	Δίδυμη	Προσπ. Έδρα	Επόμενη	Προηγ
$e_{1,a}$	v_1	$e_{1,b}$	f_1	$e_{4,b}$	$e_{3,a}$
$e_{1,b}$	v_2	$e_{1,a}$	f_2	$e_{3,b}$	$e_{4,a}$
$e_{2,a}$	v_3	$e_{2,b}$	f_1	$e_{2,b}$	$e_{4,b}$
$e_{2,b}$	v_4	$e_{2,a}$	f_1	$e_{3,a}$	$e_{2,a}$
$e_{3,a}$	v_3	$e_{3,b}$	f_1	$e_{1,a}$	$e_{2,b}$
$e_{3,b}$	v_1	$e_{3,a}$	f_2	$e_{4,a}$	$e_{1,b}$
$e_{4,a}$	v_3	$e_{4,b}$	f_2	$e_{1,b}$	$e_{3,b}$
$e_{4,b}$	v_2	$e_{4,a}$	f_1	$e_{2,a}$	$e_{1,a}$

Κορυφή	Συντεταγμένη	Προσπ. Ακμή
v_1	(0,4)	$e_{1,a}$
v_2	(2,4)	$e_{4,b}$
v_3	(2,2)	$e_{2,a}$
v_4	(1,1)	$e_{2,b}$

Πώς βρίσκουμε όλες τις προσπίπτουσες ακμές σε μία κορυφή;

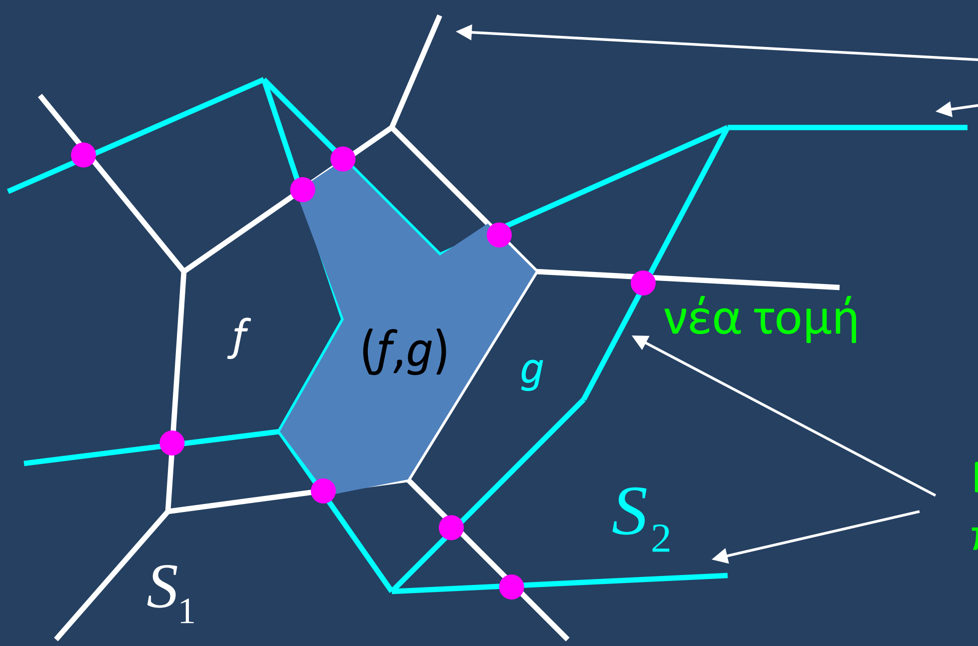
Υπέρθεση 2 Υποδιαιρέσεων



Η υπέρθεση είναι μία καινούργια υποδιαίρεση

Το Πρόβλημα της Υπέρθεσης

- Υπολογισμός ενός διπλοσυνδεδεμένου καταλόγου για τη νέα επίπεδη υποδιαίρεση.
- Κάθε έδρα θα έχει ως ετικέτα τις ετικέτες των εδρών από τις δύο αρχικές επίπεδες υποδιαιρέσεις.



Η Γενική Προσέγγιση

- Αρχικά, αντιγράφουμε τους ΔΚ των δύο υποδιαιρέσεων.

- Μετατρέπουμε το αποτέλεσμα σε μία έγκυρης μορφής ΔΚ για την νέα υποδιαίρεση.

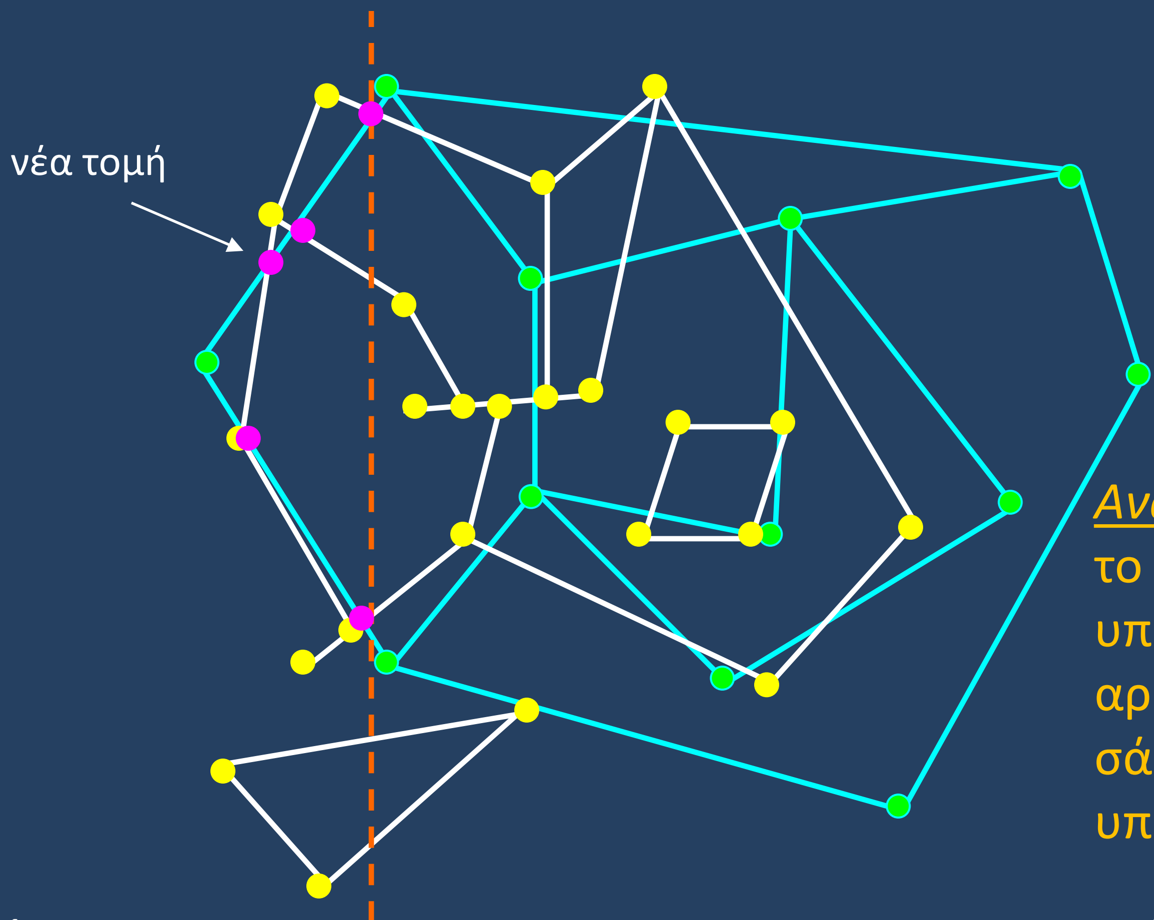
  - Υπολογίσουμε τις τομές των ακμών των δύο διαφορετικών υποδιαρέσεων.

  - Συγχωνεύουμε κατάλληλα τα μέρη των δύο ΔΚ.

    1. Εγγραφές κορυφών και ημι-ακμών.
    2. Εγγραφές εδρών.

Ιδέα: Αλγόριθμος επίπεδης σάρωσης (στην ουσία τροποποιούμε τον αλγόριθμο εύρεσης τομών).

Επίπεδη Σάρωση



Αναλλοίωτη ιδιότητα: το μέρος της υποδιαίρεσης αριστερά της γραμμής σάρωσης έχει υπολογισθεί σωστά.

ΔΚ1
ΔΚ2

ΔΚ για την νέα υποδιαίρεση

Σημείο Συμβάν

- Ενημέρωση της ουράς συμβάντων και της καταστασιακής όπως στον αλγόριθμο τομής διαστημάτων.

- Αν το σημείο-συμβάν είναι:

  - **Κορυφή** γειτονική προς ακμές ίδιας υποδιαίρεσης τότε

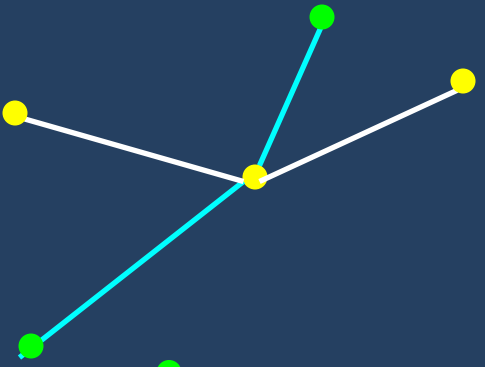
    Δεν χρειάζεται κάτι!

  - **Τομή** ακμών από διαφορετικές υποδιαιρέσεις.

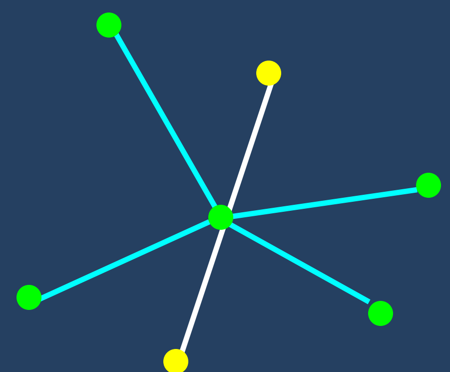
    Σύνδεση ΔΚ1 και ΔΚ2 στο σημείο τομής.

    Επεξεργαζόμαστε όλες τις περιπτώσεις.

Τρεις Περιπτώσεις Τομών

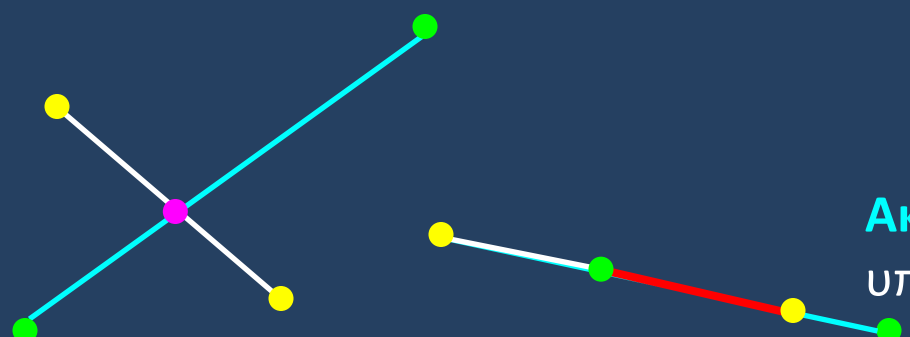


Κορυφή-Κορυφή: δύο κορυφές από διαφορετικές υποδιαιρέσεις συμπίπτουν.



Κορυφή-Ακμή: μία ακμή από τη μία υποδιαίρεση περνά από μία κορυφή από την άλλη.

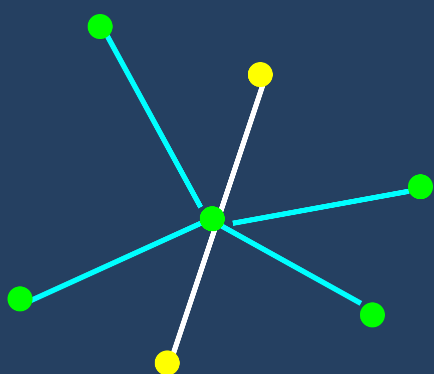
Οι άλλες 2 περιπτώσεις δεν είναι πιο δύσκολες από αυτή.



Ακμή-ακμή: δύο ακμές από διαφορετικές υποδιαιρέσεις τέμνονται.

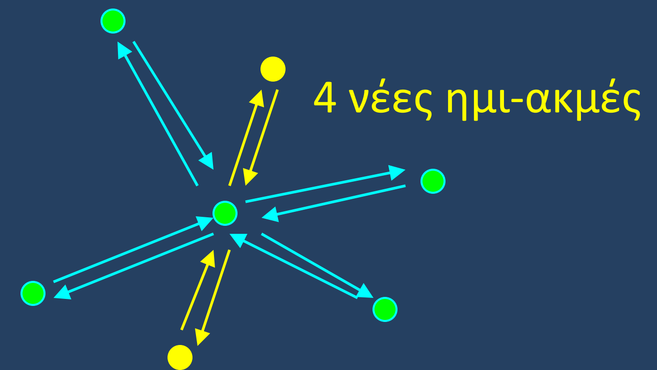
Ενημέρωση Κορυφή-Ακμή

Μία ακμή της μίας υποδιαίρεσης περνά από κορυφή της άλλης.

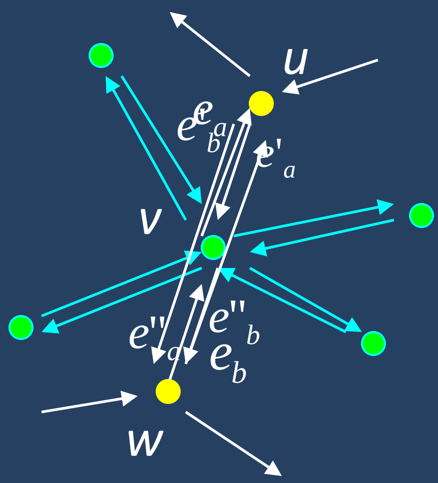


Πριν:

Μετά:



Πράξεις κατά την Ενημέρωση



1. Η ακμή e διασπάται σε δύο ακμές e' και e'' στην τομή v.

2. Ημι-ακμή $e_a = (u, w)$ σε $e'_a = (u, v)$.

3. Ημι-ακμή $e_b = (w, u)$ σε $e''_b = (w, v)$.

4. Δημιουργία των δίδυμων ημι-ακμών με την v ως αφετηρία και ενημέρωση των αντίστοιχων δεικτών.

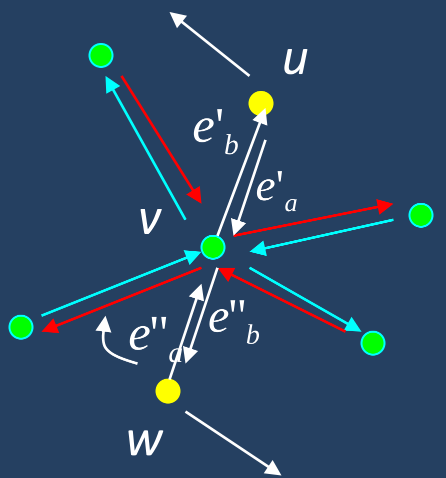
5. $\text{Next}(e'_b) \leftarrow \text{Next}(e_b)$ $\qquad$ $\text{Prev}(e'_a) \leftarrow \text{Prev}(e_a)$

   $\text{Next}(e''_b) \leftarrow \text{Next}(e_a)$ $\qquad$ $\text{Prev}(e''_a) \leftarrow \text{Prev}(e_b)$

   $\text{Prev}(\text{Next}(e_b)) \leftarrow e'_b$ $\qquad$ $\text{Next}(\text{Prev}(e_a)) \leftarrow e'_a$

   $\text{Prev}(\text{Next}(e_a)) \leftarrow e''_b$ $\qquad$ $\text{Next}(\text{Prev}(e_b)) \leftarrow e''_a$

Πράξεις κατά την Ενημέρωση



Θέτουμε τους δείκτες Next και Prev των 4 νέων ημι-ακμών.

Θέτουμε τους Next και Prev των τεσσάρων ημι-ακμών (κόκκινες) που πρόσκεινται στην *v* από την άλλη υποδιαίρεση.

π.χ. Αφού η e''_a έχει κατάληξη την *v*, θα πρέπει να θέσουμε το δείκτη Next στην επόμενη ακμή της αντίστοιχης έδρας

Αυτή θα είναι η πρώτη ημι-ακμή κατά την ωρολόγια διάταξη από την e''_a με αφετηρία την *v*.

Πώς τη βρίσκουμε από τον ΔΚ;

Κόστος Ενημέρωσης Εγγραφών Κορυφής και Ημι-Ακμών

- Η εύρεση της θέσης των e', e'' στην κυκλική διάταξη γύρων από την v απαιτεί γραμμικό χρόνο ως προς το βαθμό $\deg(v)$.

- Κάθε μία από τις άλλες πράξεις απαιτεί χρόνο O(1).

$O(m)$ χρόνος όπου m = # ακμών που πρόσκεινται στο σημείο-συμβάν κατά τη σάρωση.

Γενικεύεται στις περιπτώσεις κορυφής-κορυφής και ακμής-ακμής.

Η ενημέρωση των εγγραφών κορυφών και ημι-ακμών δεν αυξάνει τον ασυμπτωτικό χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου εύρεσης τομών.

$O(n \log n + k \log n)$

κάθε τομή είναι κορυφή στην νέα υποδιαίρεση

Συνδυασμένη πολυπλοκότητα των 2 υποδιαιρέσεων

πολυπλοκότητα της υποδιαίρεσης

Ενημέρωση Εδρών

Για κάθε έδρα *f* :

- ΈξωΣυνιστώσα(*f*)
- ΈσωΣυνιστώσες(*f*)
- Προσπ. Έδρα(*e*) $\leftarrow$ *f* για κάθε ημι-ακμή *e* που όρίζει μία έδρα.
- ετικέτα *f* ως (*F*, *G*) όπου *F* και *G* είναι οι έδρες των δύο αρχικών υποδιαιρέσεων που περιέχουν την *f*.

#εγγραφών εδρών = 1 + #κύκλοι εξωτερικών ορίων

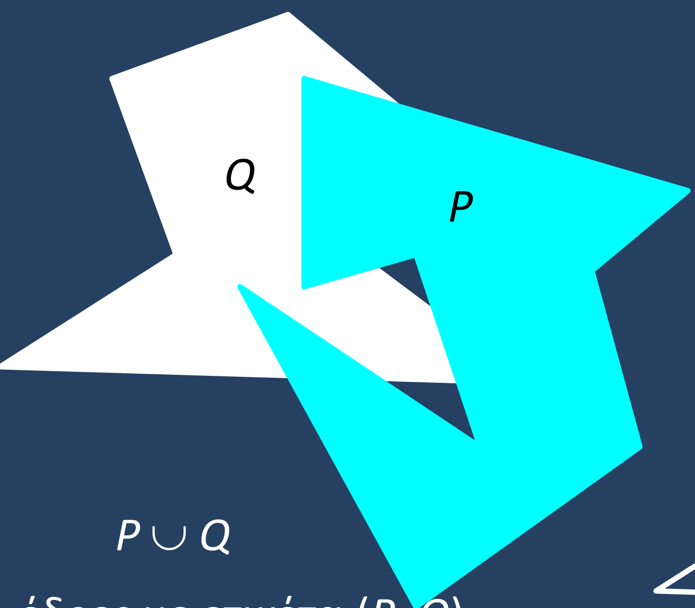
Εύκολα βρίσκουμε τους κύκλους εξωτερικών ορίων από τον ΔΚ.

Θεώρημα

Η υπέρθεση δύο επίπεδων υποδιαιρέσεων με συνδυασμένη πολυπλοκότητα n μπορεί να κατασκευαστεί σε χρόνο $O(n \log n + k \log n)$, όπου k είναι η πολυπλοκότητα της υπέρθεσης.

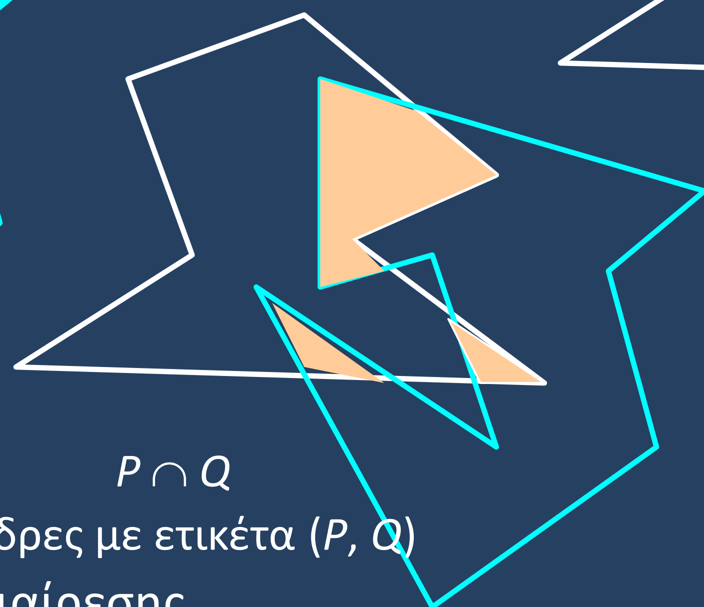
Λογικές Πράξεις

Πράξεις σε πολυγωνικές περιοχές:



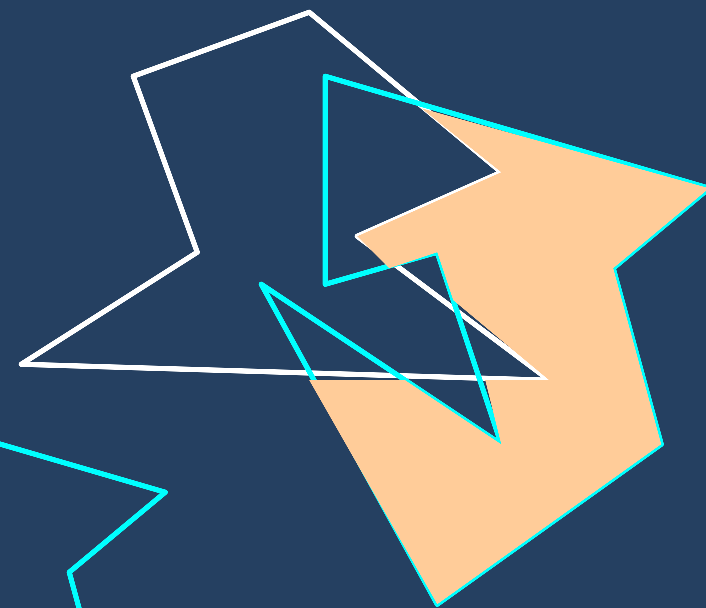
$P \cup Q$

έδρες με ετικέτα (P, Q), (P, C_∞) ή (Q, C_∞)



$P \cap Q$

έδρες με ετικέτα (P, Q)



$P - Q$

έδρες με ετικέτα (P, C_∞)

n κορυφές συνολικά

k πολυπλοκότητα υποδιαίρεσης

Τα $P \cup Q$, $P \cap Q$, και $P - Q$ μπορούν να υπολογισθούν σε χρόνο $O(n \log n + k \log n)$.