Γεωμετρικές Δομές Δεδομένων

Geometric Data Structures

Βιβλιογραφία:

- [M. de Berge et al] Κεφάλαιο 10

Δομές Δεδομένων:

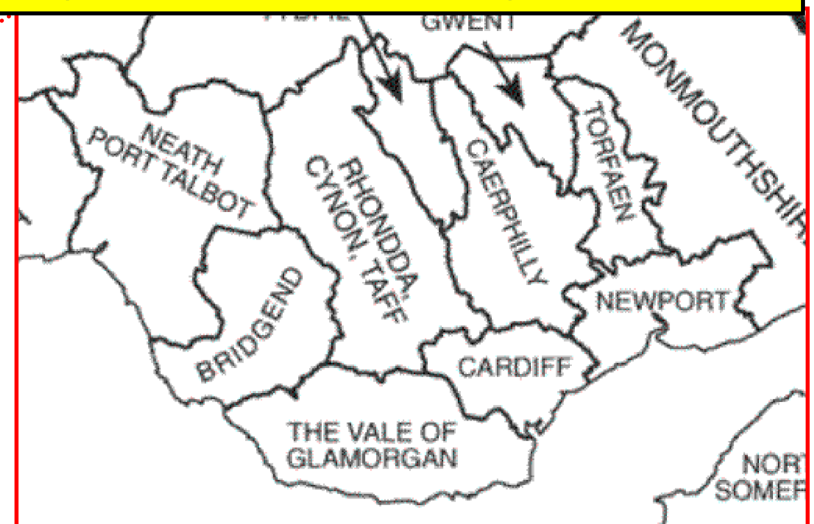
- Δένδρο Διαστημάτων
- Δένδρο Προτεραιοτήτων
- Δένδρο Ευθυγράμμων Τμημάτων

Εφαρμογές:

- Παραθυρικές Ερωτήσεις
- Συστήματα καθοδήγησης οχημάτων
- GIS
- Εξομοιωτές πτήσης
- CAD/CAM για τυπωμένα κυκλώματα

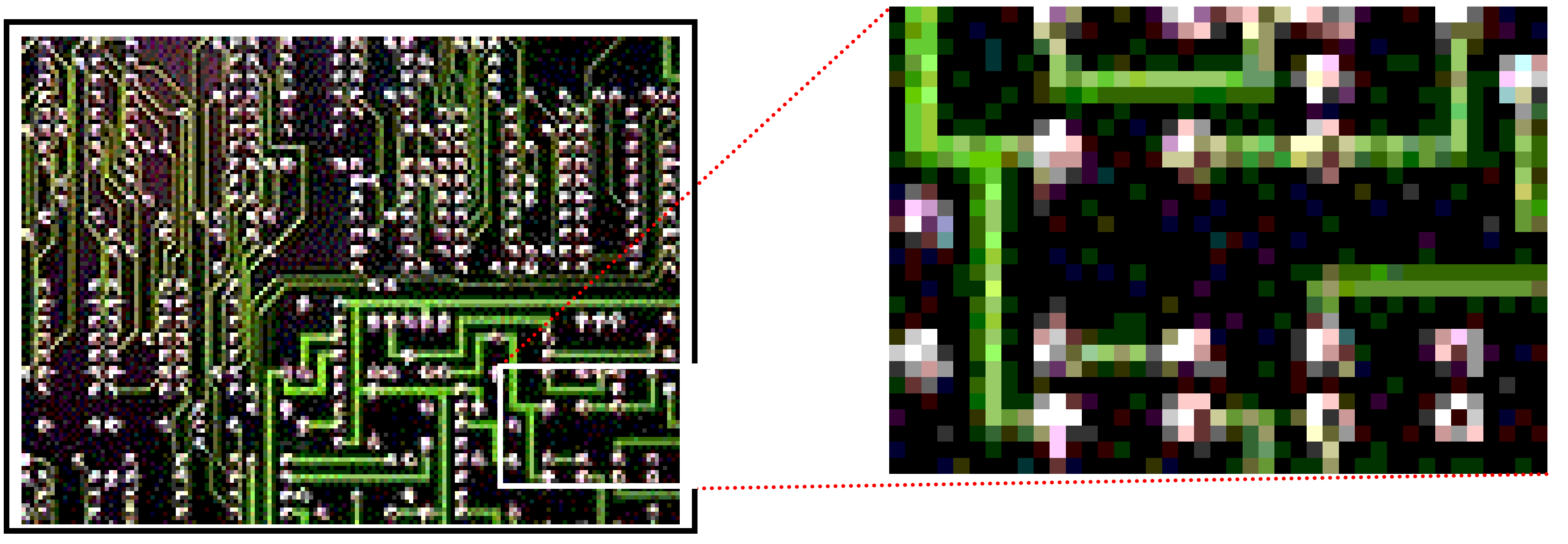
Παραθυρικές Ερωτήσεις

Πρόβλημα 1: Προεπεξεργασία ενός συνόλου S από <u>μη τεμνόμενα</u> ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο για την αποδοτική υποστήριξη ερωτημάτων της μορφής:
Ερώτηση: δοθέντος ενός ορθοκανονικού παραθύρου ερώτησης W, ανέφερε όλα τα τμήματα που το τέμνουν (και το εσωτερικό του).



Παραθυρικές Ερωτήσεις

Προεπεξεργασία ενός συνόλου S από <u>οριζόντια ή κάθετα</u> ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο για την αποδοτική υποστήριξη ερωτημάτων της μορφής:
Ερώτηση: δοθέντος ενός ορθοκανονικού ορθογώνιου παραθύρου W, ανέφερε όλα τα τμήματα του S που τέμνουν το W.



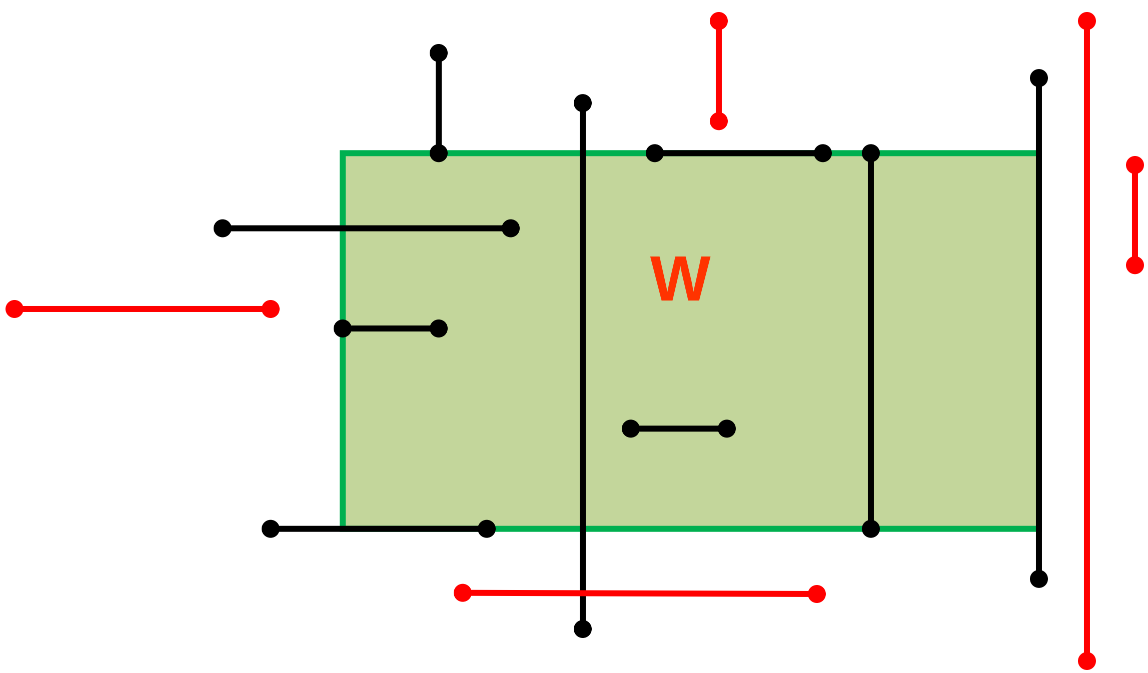
Interval Trees

ΔΈΝΔΡΑ ΔΙΑΣΤΗΜΆΤΩΝ

Δένδρα Διαστημάτων

Προπεξεργασία ενός συνόλου S από <u>οριζόντια ή κάθετα</u> ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο για αποδοτική υποστήριξη ερωτημάτων της εξής μορφής:

Ερώτημα: δοθέντος ενός αξονοπαράλληλου παραθύρου W, ανέφερε όλα τα τμήματα στο S που τέμνουν το W.



Δένδρα Διαστημάτων
Υποπρόβλημα

Έστω S ένα σύνολο από n ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο. Δοθέντος ενός ορθοκανονικού ορθογώνιου παραθύρου W, τα τμήματα του S που έχουν τουλάχιστον ένα άκρο εντός του W μπορούν να αναφερθούν σε O(K + log n) χρόνο με μία δομή που χρησιμοποιεί O(nlogn) χώρο και O(nlogn) χρόνο προεπεξεργασίας, όπου K είναι το μέγεθος της εξόδου.

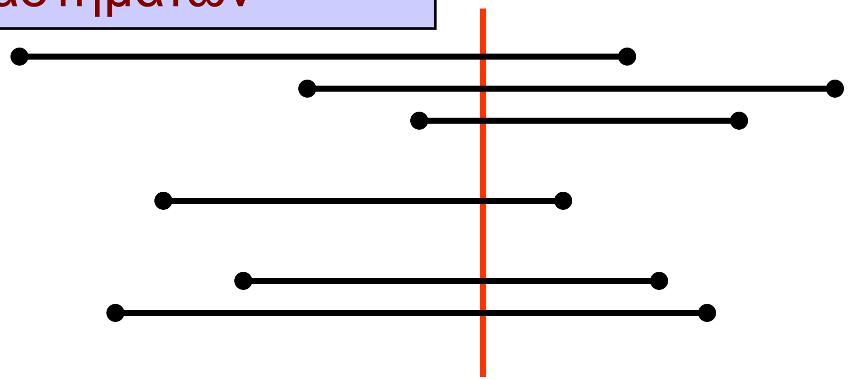
Μέθοδος:
Χρήση 2D Εκτασιακών Δένδρων στα άκρα των τμημάτων με εφαρμογή της κλασματικής επαλληλίας.

Δένδρα Διαστημάτων

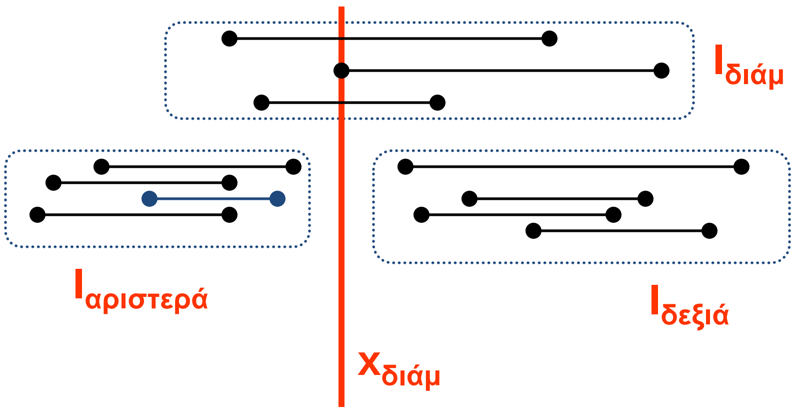
Τι γίνεται με αυτά που τέμνουν το W αλλά δεν έχουν κανένα σημείο εντός του;
Θα πρέπει όλα να τέμνουν την αριστερή (πάνω) πλευρά του W.

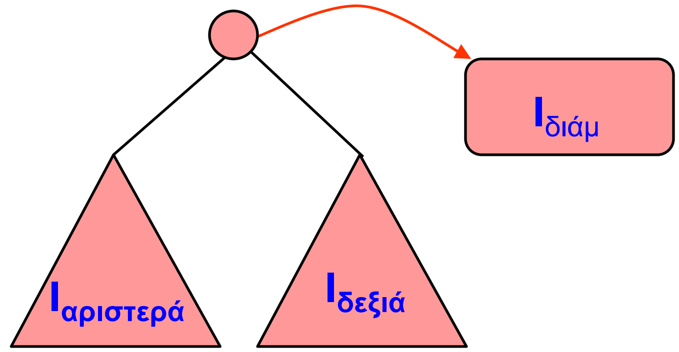
Υποπρόβλημα:
Προεπεξεργασία συνόλου S_H από οριζόντια ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο έτσι ώστε να αναφέρουμε το υποσύνολο του S_H που τέμνεται από μία **<u>κάθετη ευθεία</u>**.

Μέθοδος: Χρήση Δένδρων Διαστημάτων



Δομή

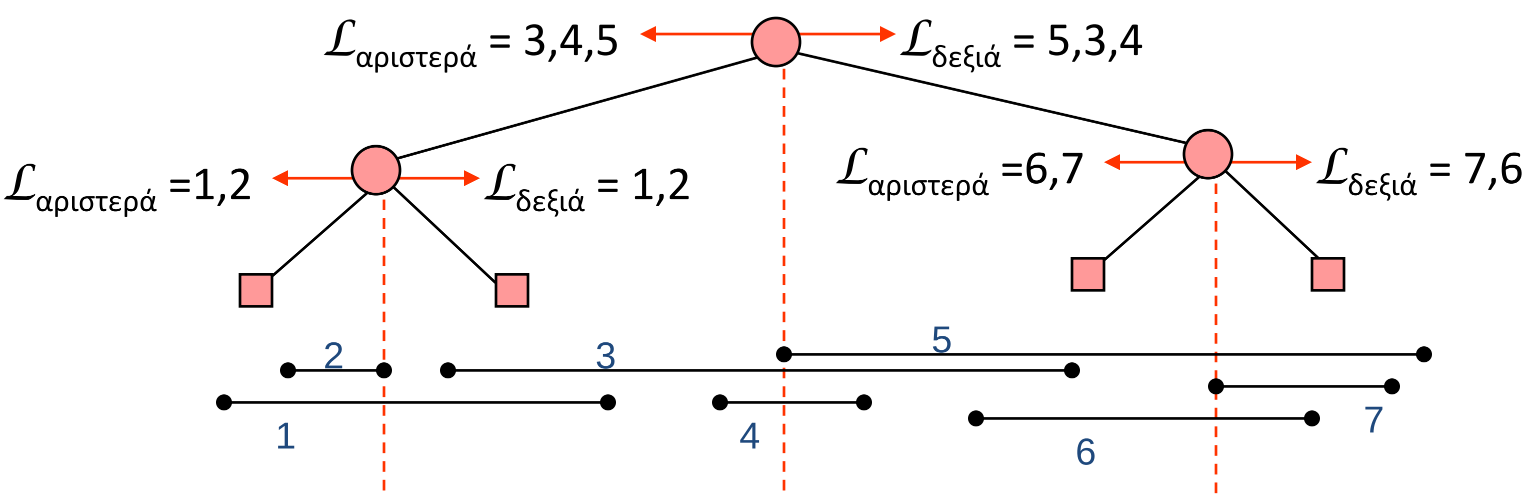




Συνοδευτικές δομές της $I_{διάμ}$:

$\mathcal{L}_{αριστερά}$ = λίστα τμημάτων του $I_{διάμ}$ ταξινομημένα ως προς τα αριστερά άκρα,

$\mathcal{L}_{δεξιά}$ = λίστα τμημάτων του $I_{διάμ}$ ταξινομημένα ως προς τα δεξιά άκρα.



Δένδρο Διαστημάτων

Θεώρημα: Ένα δένδρο διαστημάτων για n οριζόντια τμήματα:

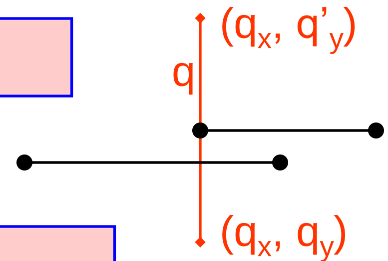
- O(n) χώρος
- O(nlogn) χρόνος κατασκευής
- O(K + logn) χρόνος ερώτησης

[αναφορά όλων των K διαστημάτων που περιέχουν την δοθείσα *x*-συντεταγμένη]

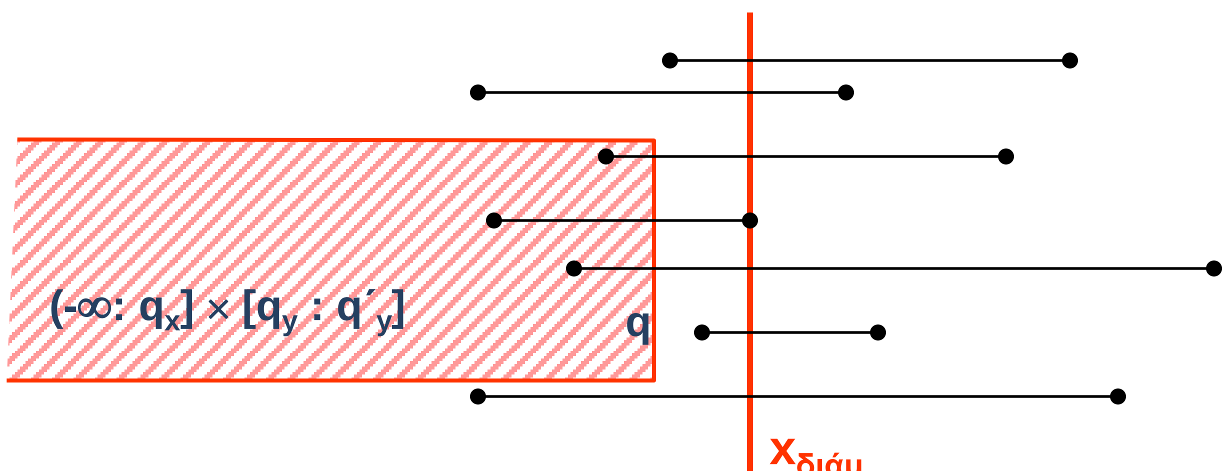
Δένδρο Διαστημάτων

Υποπρόβλημα: Αν δεν είναι κάθετη γραμμή αλλά κάθετο ευθύγραμμο τμήμα τότε τι κάνουμε;

Απλά αλλάζουμε τις συνοδευτικές δομές σε κάθε κόμβο.



Λύση:
$\mathcal{L}_{αριστερά}$ = **Εκτασιακό δένδρο** στα αριστερά άκρα του $I_{διάμ}$,
$\mathcal{L}_{δεξιά}$ = **Εκτασιακό δένδρο** στα δεξιά άκρα του $I_{διάμ}$.



Δένδρο Διαστημάτων

Θεώρημα: Ένα δένδρο διαστημάτων για n οριζόντια τμήματα:

- O(nlogn) χώρος
- O(nlogn) χρόνος κατασκευής
- $O(K + \log^2 n)$ χρόνος ερώτησης

[αναφορά όλων των K διαστημάτων που τέμνουν ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα.]

Συνέπεια: Έστω S ένα σύνολο n οριζόντιων ή κάθετων ευθυγράμμων τμημάτων στο επίπεδο. Μπορούμε να επεξεργαστούμε το S για ερωτήσεις ορθοκανονικών ορθογωνίων παραθύρων με τις εξής πολυπλοκότητες:

- O(nlogn) χώρος
- O(nlogn) χρόνος προεπεξεργασίας
- $O(K + \log^2 n)$ χρόνος ερώτησης

[αναφορά όλων των K τμημάτων που τέμνουν το πράθυρο ερώτησης]

Priority Search Trees

ΠΡΟΤΕΡΑΪΚΆ ΔΈΝΔΡΑ ΑΝΑΖΉΤΗΣΗΣ

Προτεραϊκά Δένδρα Αναζήτησης

Βελτίωση της προηγούμενης δομής:
Η συνοδευτική δομή μπορεί να υλοποιηθεί με ένα Προτεραϊκό Δένδρο Αναζήτησης (ΠΔΑ) αντί των εκτασιακών δένδρων.

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subseteq \Re^2$.

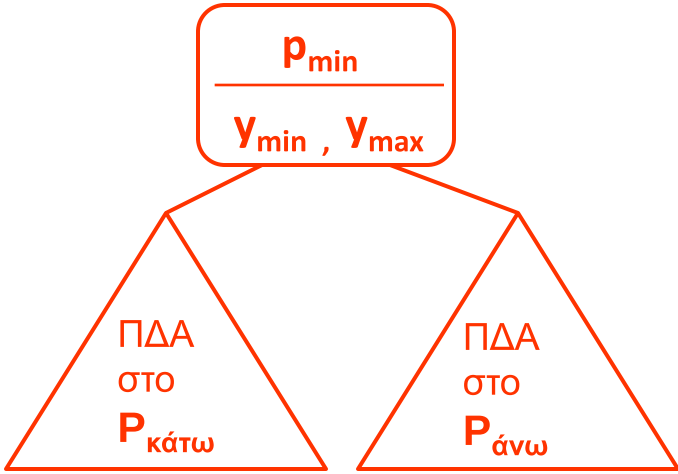
Ένα ΠΔΑ $\mathcal{T}$ στο P είναι:

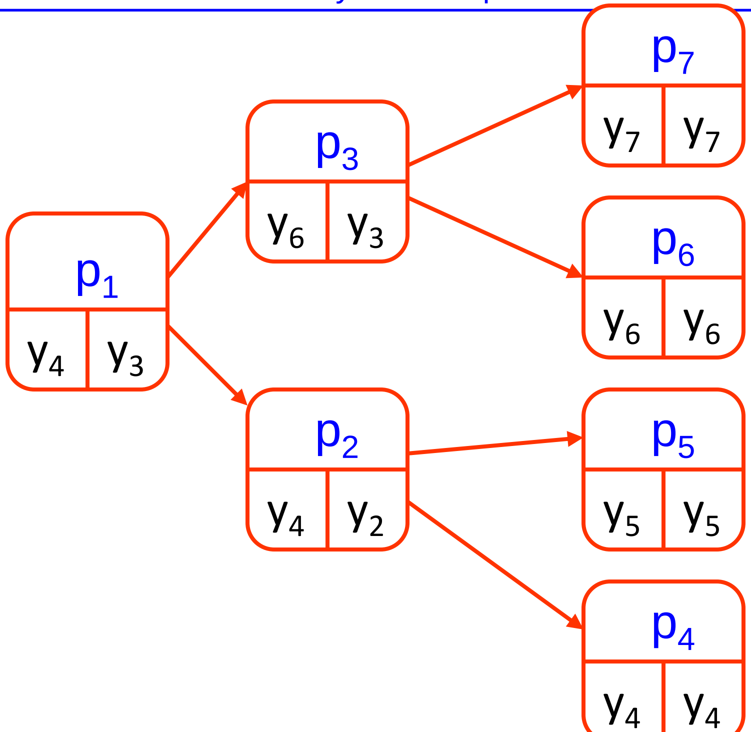
- ένα δυαδικό δένδρο με ένα σημείο ανά κόμβο,
- ένας σωρός ως προς την x συντεταγμένη,
- ένα δένδρο αναζήτησης ως προς την y συντεταγμένη.

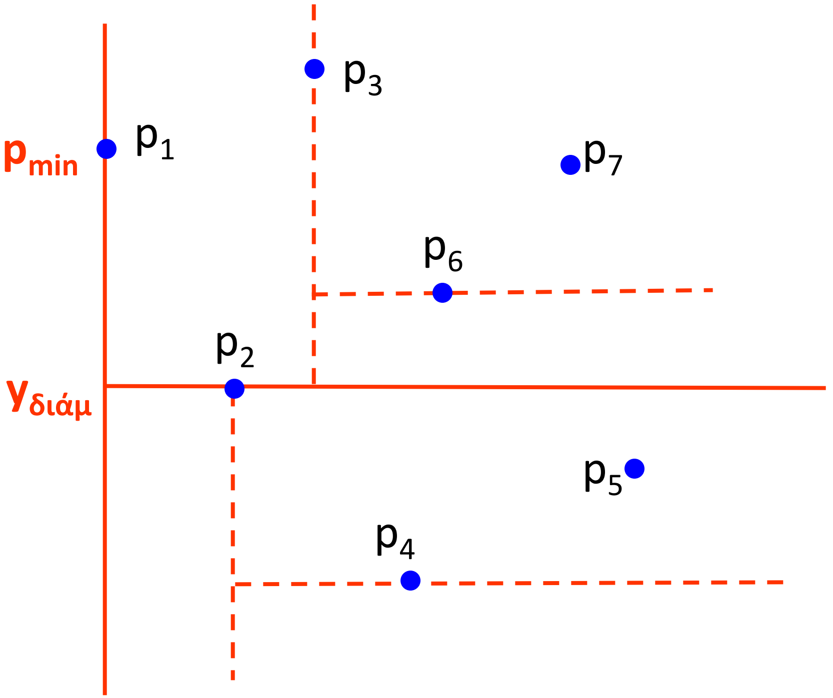
Προτεραϊκά Δένδρα Αναζήτησης

p_{min} ← σημείο του P με την ελάχιστη x-συντεταγμένη.
y_{min} ← ελάχιστη y-συντεταγμένη των σημείων του P
y_{max} ← μέγιστη y-συντεταγμένη των σημείων του P

P' ← $P - \{p_{min}\}$
$y_{διάμ}$ ← y-διάμεσος των σημείων του P´
$P_{κάτω}$ ← $\{ p \in P' \mid p_y \leq y_{διάμ} \}$
$P_{άνω}$ ← $\{ p \in P' \mid p_y > y_{διάμ} \}$







Απόδοση

Ένα ΠΔΑ $\mathcal{T}$ σε n σημεία στο επίπεδο απαιτεί:

- O(n) χώρο
- O(nlogn) χρόνο κατασκευής:
  - είτε αναδρομικά ή
  - ταξινόμηση του P ως προς y και κατασκευή του $\mathcal{T}$ σε O(n) χρόνο από κάτω προς τα πάνω. (Πώς;)

Τα ΠΔΑ μπορούν να αντικαταστήσουν τα εκτασιακά δένδρα ως σχετιζόμενες δομές στα δένδρα διαστημάτων.

- απλούστερα (όχι κλασματική επαλληλία)
- γραμμικός χώρος για σχετιζόμενες δομές.

Χρήση του ΠΔΑ για απάντηση ερωτημάτων τριών πλευρών:

$R = (-\infty: q_x] \times [q_y : q'_y]$

Αλγόριθμος ΕρώτησηΠΔΑ(v, R)

Αν $v = nil$ ή $p_{min\,x}(v) > q_x$ ή $y_{min}(v) > q'_y$ ή $y_{max}(v) < q_y$

τότε return

Αν $p_{min\,x}(v) \leq q_x$ και $q_y \leq y_{min}(v) \leq y_{max}(v) \leq q'_y$

τότε **Αναφορά.στο.Υποδένδρο(v, q_x)**

αλλιώς

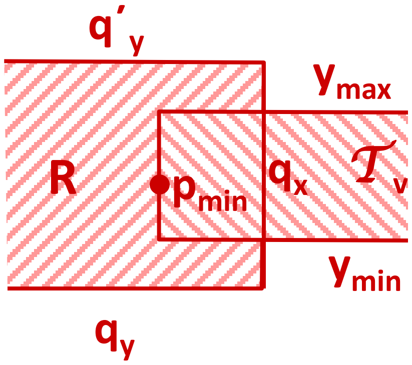
Αν $p_{min\,x}(v) \in R$ **τότε** αναφορά $p_{min\,x}(v)$

ΕρώτησηΠΔΑ(lc(v), R)

ΕρώτησηΠΔΑ(rc(v), R)

τέλος αλλιώς

τέλος



Διαδικασία Αναφορά.στο.Υποδένδρο(v, q_x)

Αν **v=nil** **τότε return**

Αν $p_{min\,x}(v) \leq q_x$ **τότε**

αναφορά $p_{min\,x}(v)$

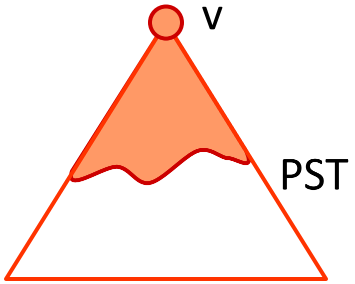
Αναφορά.στο.Υποδένδρο(lc(v), q_x)

Αναφορά.στο.Υποδένδρο(rc(v), q_x)

τέλος αν

τέλος

Διακοπτόμενη προδιάταξη στον σωρό: $O(1 + K_v)$ χρόνος.

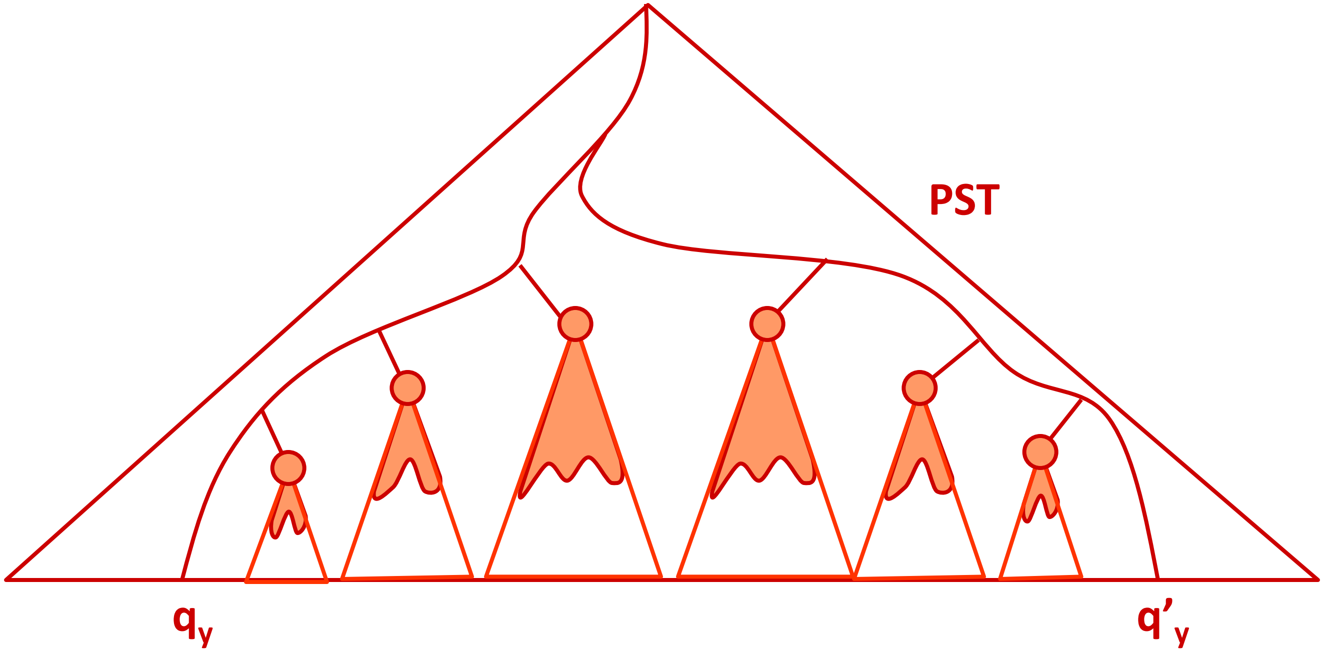


Λήμμα: Η διαδικασία Report.In.Subtree(v, q_x) απαιτεί $O(1 + K_v)$ χρόνο για την αναφορά όλων των σημείων στο υποδένδρο με ρίζα το v του οποίου οι x-συντεταγμένες είναι $\leq q_x$, όπου K_v είναι το πλήθος των αναφερόμενων σημείων.

Θεώρημα: Το ΠΔΑ για ένα σύνολο P με n σημεία στο επίπεδο:

- O(n) χώρος
- O(nlogn) χρόνος κατασκευής
- O(K + logn) χρόνος ερώτησης

[αναφορά όλων των K σημείων του P σε ένα διάστημα $R = (-\infty: q_x] \times [q_y : q'_y]$.]



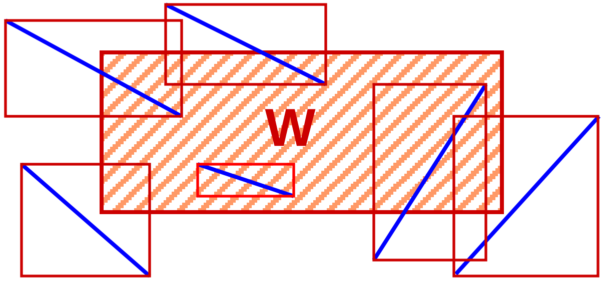
Segment Trees

ΔΈΝΔΡΟ ΕΥΘΥΓΡΆΜΜΩΝ ΤΜΗΜΆΤΩΝ

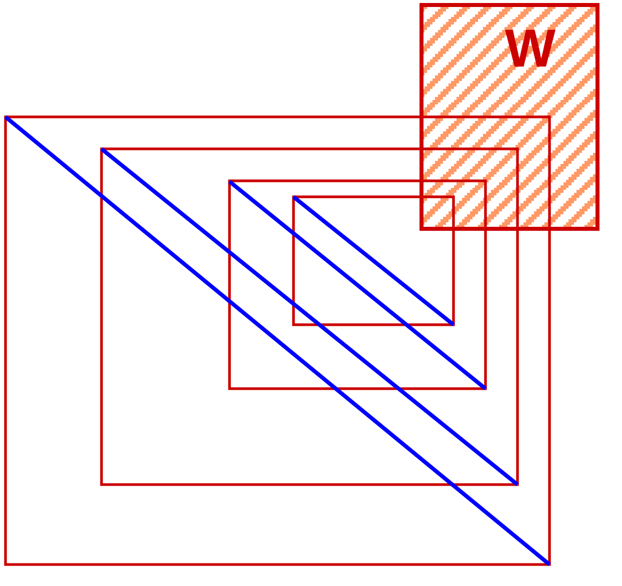
Δένδρα Ευθυγραμμων Τμημάτων

Αρχικό πρόβλημα: Αυθαίρετης κατεύθυνσης ευθύγραμμα τμήματα.

Λύση 1: Περιφρακτικά Ορθογώνια.



Χειρότερη περίπτωση.
Πολλά ψευδή θετικά.



Προσέγγιση Γεωμετρικού Τόπου

- Καθορισμός παραμετρικού χώρου.

- Κάθε περιοχή αντιστοιχεί σε ερωτήματα με την ίδια απάντηση.

- Αν οι περιοχές είναι λίγες τότε δουλεύει καλά.

Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων (ΔΕΤ)

Αυθαίρετης κατεύθυνσης ευθύγραμμα τμήματα.

Λύση 2: Χρήση δένδρων ευθύγραμμων τμημάτων.

a) Τα τμήματα με άκρα εντός του W αναφέρονται με χρήση εκτασιακών δένδρων.

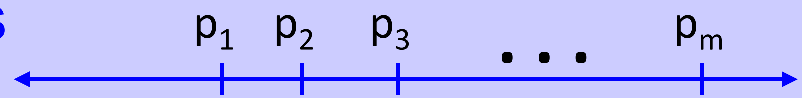
b) Τα τμήματα που δεν έχουν άκρα εντός του W αναφέρονται με Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων.

Υποπρόβλημα: Προεπεξεργασία ενός συνόλου S από n μη τεμνόμενα τμήματα στο επίπεδο σε μία δομή δεδομένων ώστε να αναφέρονται όλα τα τμήματα του S που τέμνουν ένα δοθέν κάθετο ευθύγραμμο τμήμα

$$q = q_x \times [q_y : q'_y]$$

Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων Ιδέες

Στοιχειώδη x-διαστήματα του S



$(-\infty: p_1), [p_1 : p_1], (p_1 : p_2), [p_2 : p_2], \ldots , (p_{m-1} : p_m), [p_m : p_m], (p_m : +\infty).$

Κατασκευάζουμε ένα δένδρο αναζήτησης όπου κάθε φύλλο αντιστοιχεί σε ένα στοιχειώδες διάστημα (από αριστερά προς τα δεξιά).

Φύλλο v:
διαστ(v) **=** σύνολο διαστημάτων του S που περιέχουν το στοιχειώδες διάστημα που αντιστοιχούν στο v.

Ιδέα 1: Αποθήκευση του διαστ(v) με κάθε φύλλο v.

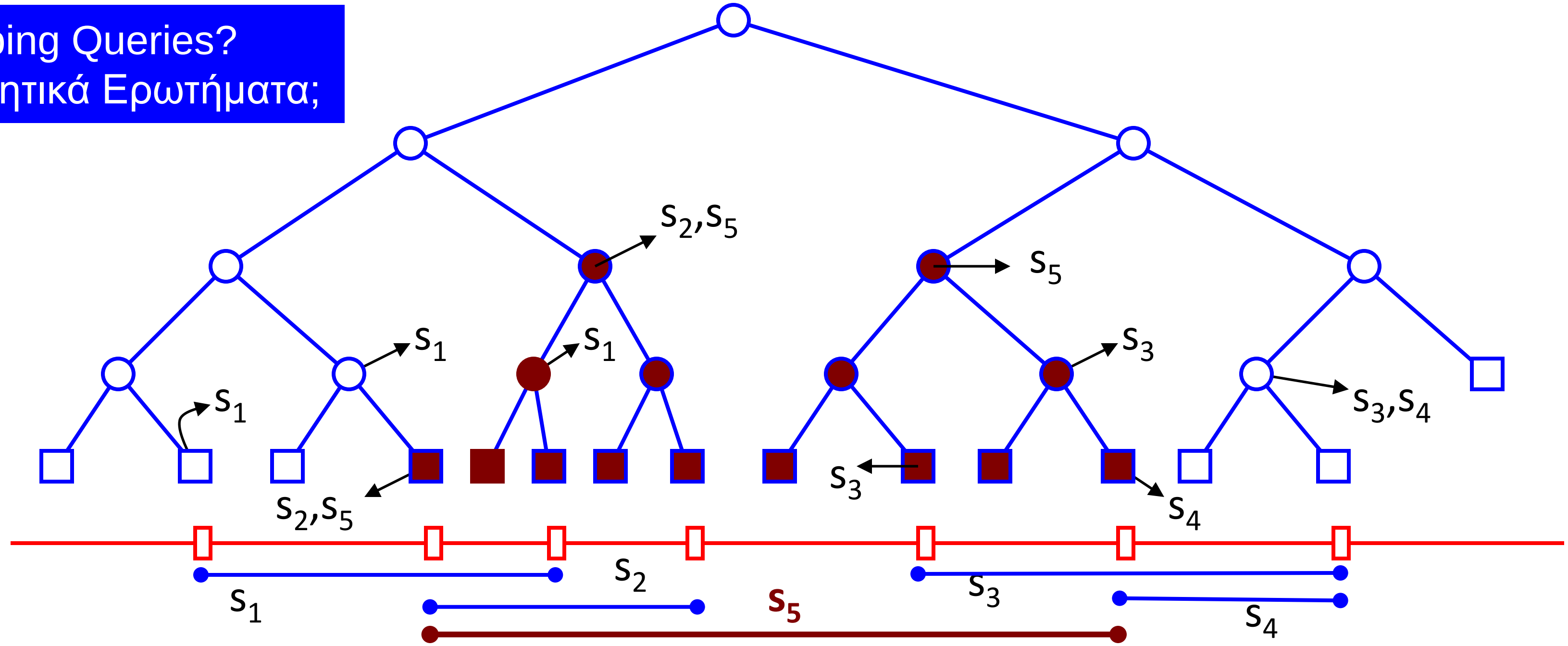
Χώρος O(n²), αφού κάθε διάστημα του S μπορεί να επικαλύπτει πολλά στοιχειώδη διαστήματα

Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων
Ιδέες

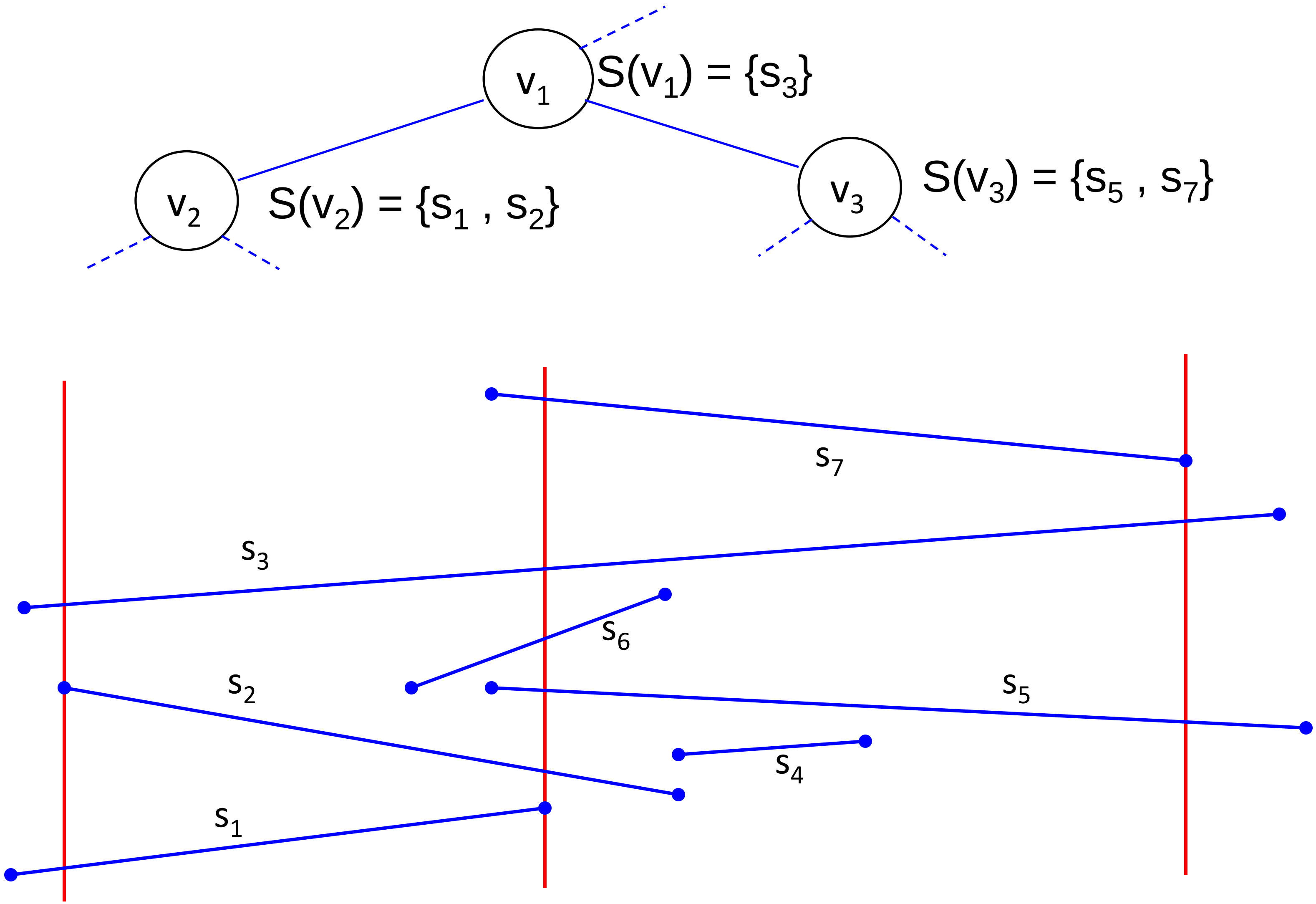
Ιδέα 2:
$\forall$ εσωτερικό κόμβο v:
διάστ(v) = ένωση στοιχειωδών διαστημάτων των φύλλων-απογόνων του v.

Αποθήκευση του [x:x΄] του S στον κόμβο v αν και μόνο αν διαστ(v) $\subseteq$ [x:x΄] άλλά διαστ(parent(v)) $\not\subset$ [x:x΄].
Κάθε διάστημα του S αποθηκεύεται σε το πολύ 2 κόμβους ανά επίπεδο (άρα O(logn) συνολικά). Άρα ο χώρος μειώνεται σε O(nlogn).

Stabbing Queries?
Διατρητικά Ερωτήματα;



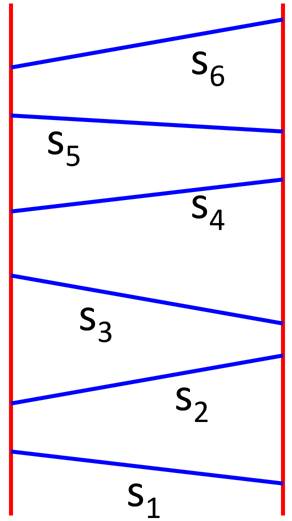
Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων

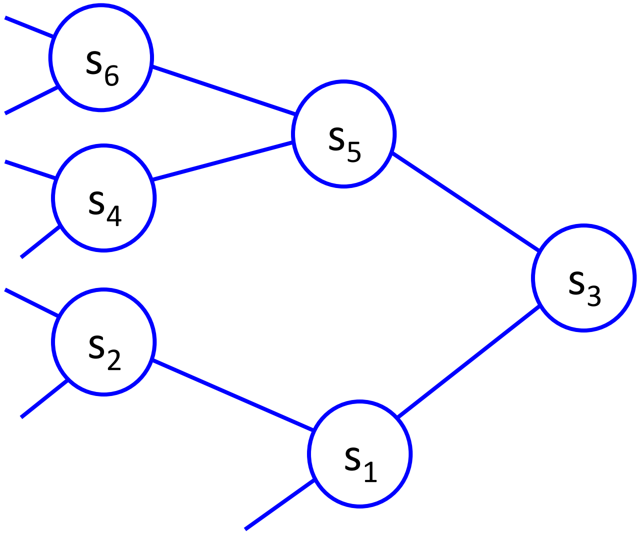


Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων

Συνοδευτική Δομή

είναι ένα δένδρο αναζήτησης ταξινομημένα ως προς την y συντεταγμένη των διαστημάτων στο S(v) που τέμνουν τη λωρίδα διαστ(v) × (-∞ : +∞).





Δένδρα Ευθύγραμμων Τμημάτων

Θεώρημα:

Το ΔΕΤ για ένα σύνολο S μη τεμνομένων διαστημάτων στο επίπεδο:

- O(nlogn) χώρος
- O(nlogn) χρόνος κατασκευής
- O(K + $\log^2 n$) χρόνος ερώτησης

[αναφορά των K διαστημάτων του S που τέμνουν ένα κάθετο ευθύγραμμο τμήμα]

Συνέπεια:

Τα ΔΕΤ μπορούν να λύσουν το πρόβλημα του παραθύρου με την παραπάνω απόδοση, όταν το παράθυρο είναι αξονοπαράλληλο και τα διαστήματα μη τεμνόμενα μεταξύ τους.

1. Segment Trees can be used for multi-level data structures.

   (a) Let R be a set of n axis-parallel rectangles in the plane. Design a data structure for R such that the rectangles in R that contain a query point q can be reported efficiently. Analyze the amount of storage and the query time of your data structure. [Hint: Use a segment tree on the x-intervals of the rectangles, and store canonical subsets of the nodes in this segment tree in an appropriate associated structure.]

   (b) Generalize this data structure to d-dimensional space. Here we are given a set of axis-parallel hyper-rectangles, i.e., polytopes of the form $[x_1 : x'_1] \times [x_2 : x'_2] \times \ldots \times [x_d : x'_d]$, and we want to report the hyper-rectangles that contain a query point.

2. Let I be a set of intervals on the real line. We want to store these intervals such that we can efficiently determine

   (a) those intervals that are completely contained in a given interval [x : x']. Describe a data structure that uses O(n log n) storage and solves such queries in O(K + log n) time, where K is the output size. [Hint: Use a range tree.]

   (b) The same question as in part (a), except that we want to report the intervals that contain a query interval [x : x'].