Σχηματισμοί και Δυικότητα

Arrangements and Duality

Υπερδειγματοληψία κατά την Ιχνηλάτιση (λύση για anti-aliasing)

Αναφορές:

- [Preparata-Shamos’85] *κεφάλαιο 1.3*
- [Edelsbrunner’87] *κεφάλαια 1.6, 4.2, 14*
- [O’Rourke’98] *κεφάλαιο 6*
- [Matoušek] *Σημειώσεις* [http://kam.mff.cuni.cz/~matousek/]
- Guibas, Stolfi [1987] “Ruler, Compass and computer: The design and analysis of geometric algorithms,” *Proc. of the NATO Advanced Science Institute, series F, vol. 40: Theoretical Foundations of Computer Graphics and CAD*, 111-165.
- Edelsbrunner, O’Rourke, Seidel [1986] “Constructing Arrangements of Lines and Hyper-planes with Applications,” SIAM J. Comp. 15, 341-363.
- Edelsbrunner, Guibas [1989] “Topologically sweeping an arrangement,” JCSS 38, pp:165-194 [correction in JCSS …]

Εφαρμογές:

- Εκτασιακή αναζήτηση,
- Γεωμετρική βελτιστοποίηση,
- Σχεδιασμός κίνησης,
- Οπτικοποίηση,
- Μοντελοποίηση μορίων,
- …

Αντί για Voronoi, λόγω της εξής ερώτησης (από 2014):

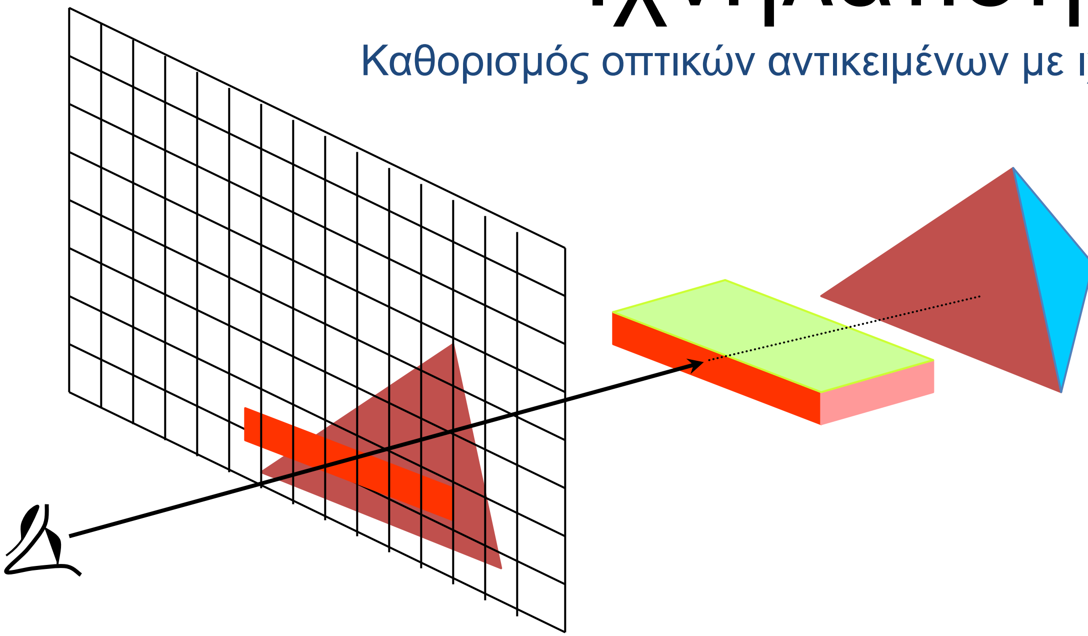
Φταίει ο Α. Παπαδόπουλος:

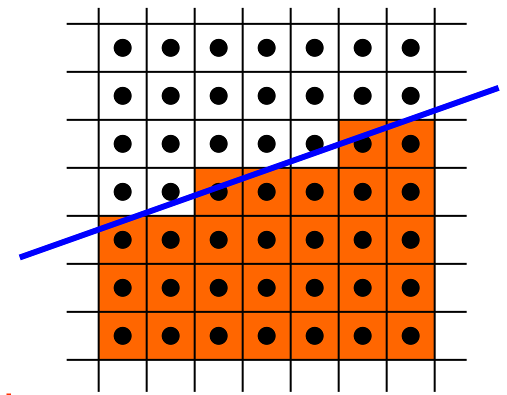
Given a 2D plane, suppose that there are around 6000 points on it. Find a line which passes the most number of points.

[Google Interview Question Software Engineer / Developers]

Υπερδειγματοληψία κατά την Ιχνηλάτιση

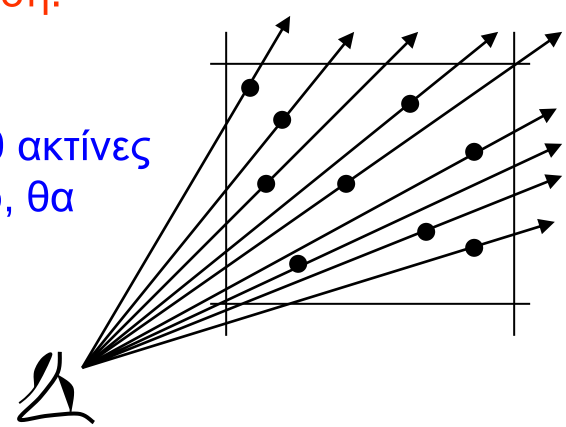
Καθορισμός οπτικών αντικειμένων με ιχνηλάτιση.





- Μία ακτίνα από το κέντρο κάθε εικονοστοιχείου.
- Πρόβλημα: οδόντωση στις ακμές, ψευδής απόφαση.

- Λύση: υπερδειγματοληψία. Πολλές ακτίνες ανά εικονοστοιχεία (συνήθως τυχαία). Παράδειγμα: 100 ακτίνες ανά εικονοστοιχείο, και 43 χτυπάνε ένα αντικείμενο, θα λέμε ότι ένα αντικείμενο είναι ορατό στο 43% της επιφάνειας του εικονοστοιχείου.

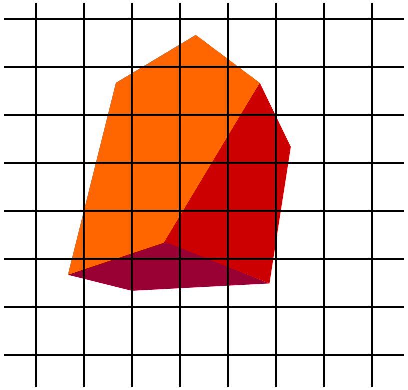


Υπολογισμός Απόκλισης

Εικονοστοιχείο U = [0 : 1] × [0 : 1]

S = σύνολο *n* δειγματικών σημείων στο U

$\mathcal{H}$ = σύνολο όλων (άπειρων) των ημιεπιπέδων



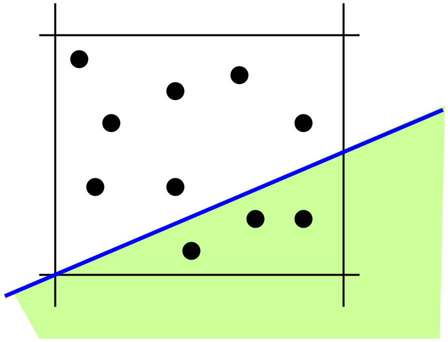
<u>Για h $\in \mathcal{H}$ ορίζουμε:</u>

$\mu(h)$ = εμβαδό(h $\cap$ U) συνεχές μέτρο

$\mu_S(h) = |S \cap h| \,/\, |S|$ διακριτό μέτρο

$\Delta_S(h) = |\, \mu(h) - \mu_S(h) \,|$ απόκλιση του h

$\Delta_{\mathcal{H}}(S) = \sup_{h \in \mathcal{H}} \Delta_S(h)$ ημιεπιπεδική απόκλιση του S



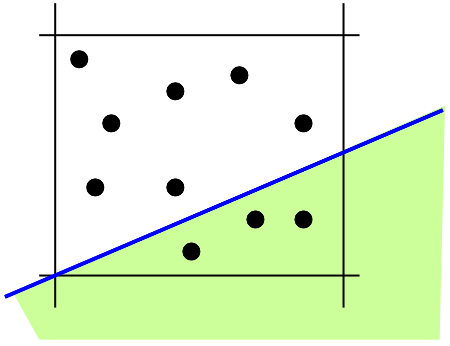
$\Delta_S(h) = |1/4 - 3/10| = 0.05$

$\Delta_{\mathcal{H}}$(S): μπορεί να υπολογισθεί σε O(n^2) χρόνο, χρησιμοποιώντας
Γεωμετρική Δυϊκότητα &
Σχηματισμοί Ευθειών στο επίπεδο.

Απόκλιση

Λήμμα: Έστω *S* με *n* σημεία στο μοναδιαίο τετράγωνο *U*. Ένα ημιεπίπεδο *h* που επιτυγχάνει την μέγιστη απόκλιση ως προς S ανήκει σε μία από τις εξής κατηγορίες:

1. Περιέχει στο σύνορό του ένα μόνο σημείο.
2. Περιέχει στο σύνορό του ≥ 2 σημεία.



1: $O(n)$ ημιεπίπεδα. Υπολογισμός μέγιστης απόκλισης σε $O(n^2)$ χρόνο (τετριμμένα).

2: $O(n^2)$ ημιεπίπεδα. Θα δούμε ότι το διακριτό μέτρο υπολογίζεται σε $O(n^2)$ χρόνο. (δυϊκότητα + σχηματισμοί ευθειών)

Θεώρημα: Η ημιεπιπεδική απόκλιση ενός συνόλου S με *n* σημεία του μοναδιαίου τετραγώνου μπορεί να υπολογιστεί σε $O(n^2)$ χρόνο.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΉ ΔΥΪΚΌΤΗΤΑ

Δυϊκότητα

Μετασχηματισμοί Σημείων σε Υπερεπιφάνειες

Μερικές Εφαρμογές:

- Τομή ημιεπιπέδων $\Leftrightarrow$ Κυρτό περίβλημα συνόλου σημείων

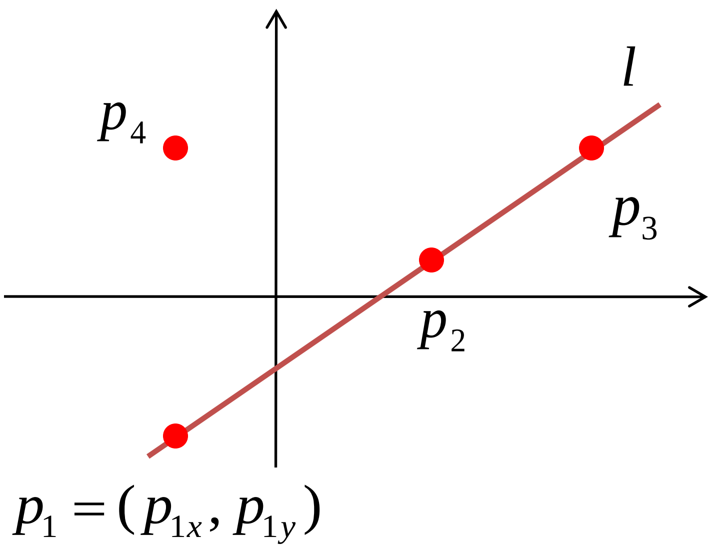
- Εφαρμόζεται όταν το πρόβλημα είναι «διαισθητικά» πιο εύκολο στον δυϊκό χώρο.

Δυϊκότητα

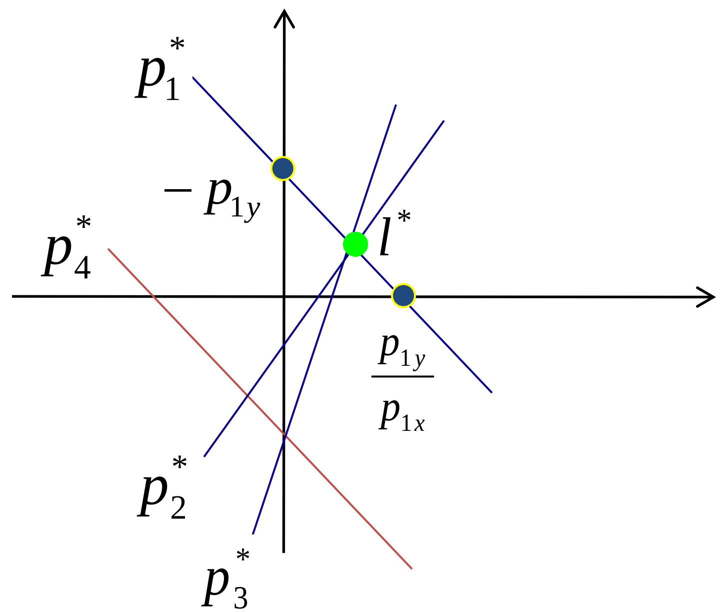
Κατακόρυφες;;;;

σημείο $p = (p_x, p_y)$ ⟶ γραμμή $p^* : y = p_x x - p_y$

γραμμή $l : y = mx + b$ ⟶ σημείο $l^* = (m, -b)$



Πρωτεύον επίπεδο



Δυϊκό επίπεδο

Συνευθειακά Σημεία

Τα p_1, p_2, p_3 είναι συνευθειακά στη γραμμή λ

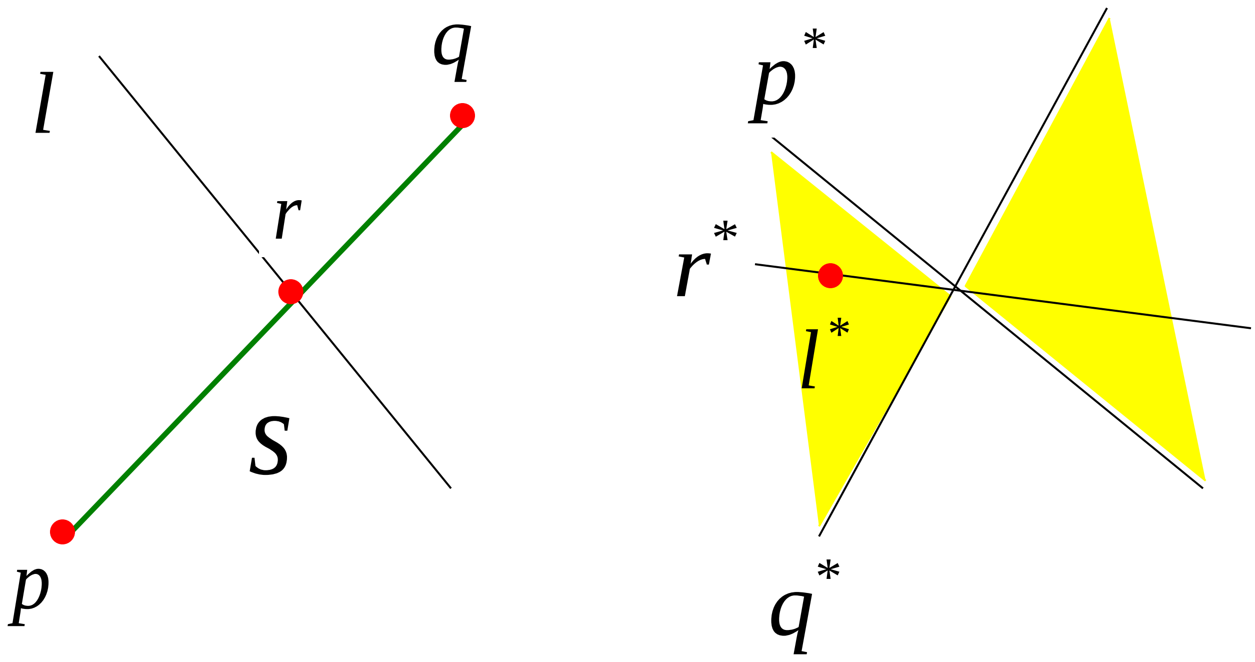
⇨ οι δυϊκές γραμμές p_1^*, p_2^*, p_3^* τέμνονται στο σημείο λ^*

- $$(p^*)^* = p$$
  $$(\lambda^*)^* = \lambda$$

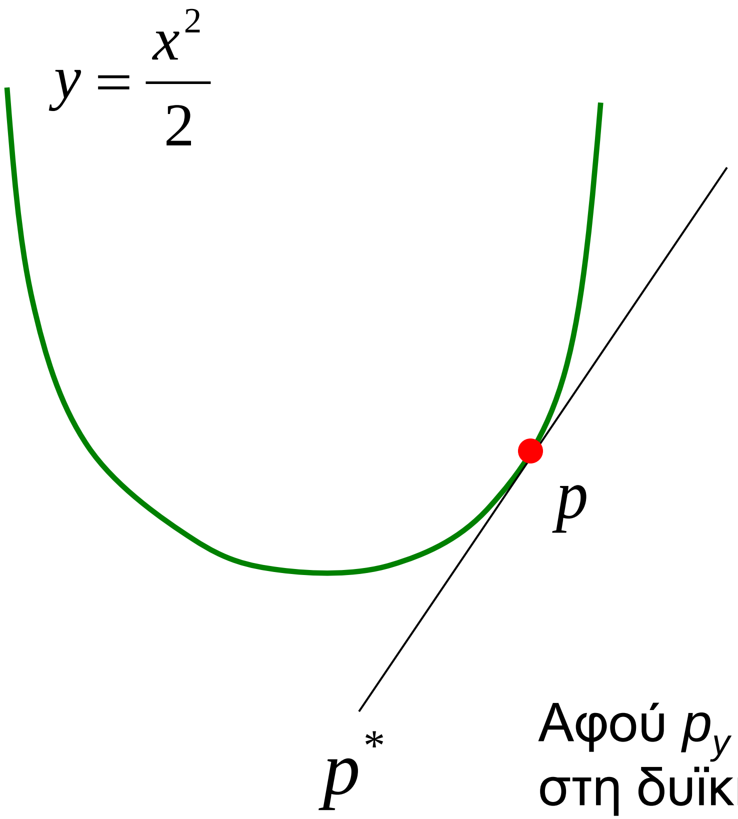
- $p \in \lambda$ αν και μόνο αν $\lambda^* \in p^*$

- Το p κείται πάνω από την λ αν και μόνο αν το λ^* κείται πάνω από την p^*

Δυϊκό Ευθύγραμμου Τμήματος



Σχέση με Παραβολή



Η δυϊκή γραμμή p^* του p είναι η εφαπτομένη της παραβολής στο p.

Απόδειξη: Έστω $p = (p_x, p_y)$

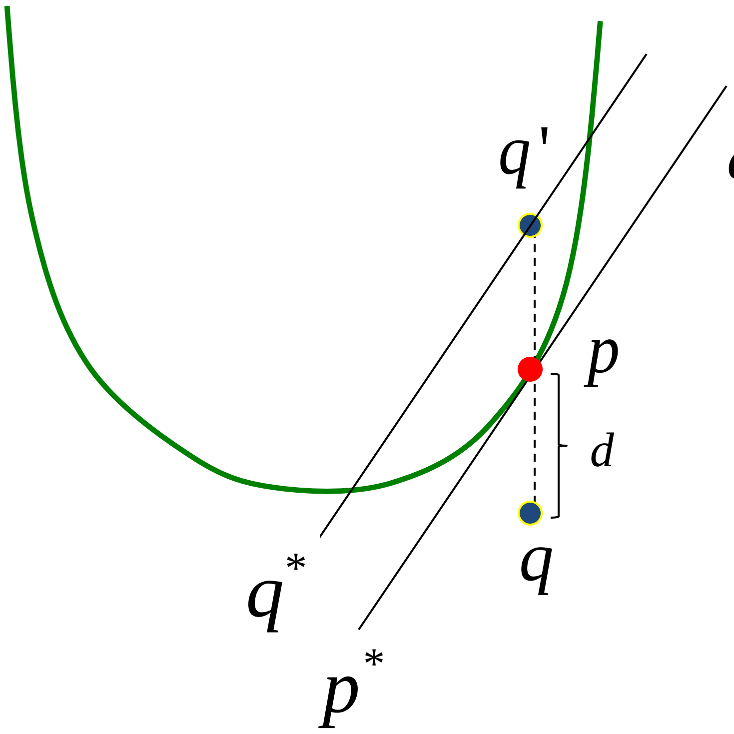
Κλίση εφαπτομένης p_x

Η δυϊκή γραμμή είναι η $y = p_x x - p_y$ με ίδια κλίση.

Αφού $p_y = p_x^2/2$, το σημείο $p = (p_x, p_y)$ κείται στη δυϊκή γραμμή.

Σχέση με Παραβολή (2)

$$y = \frac{x^2}{2}$$



$$p = (p_x, p_y) \Longrightarrow p^* : y = p_x x - p_y$$

$$q = (p_x, p_y - d) \Longrightarrow q^* : y = p_x x - p_y + d$$

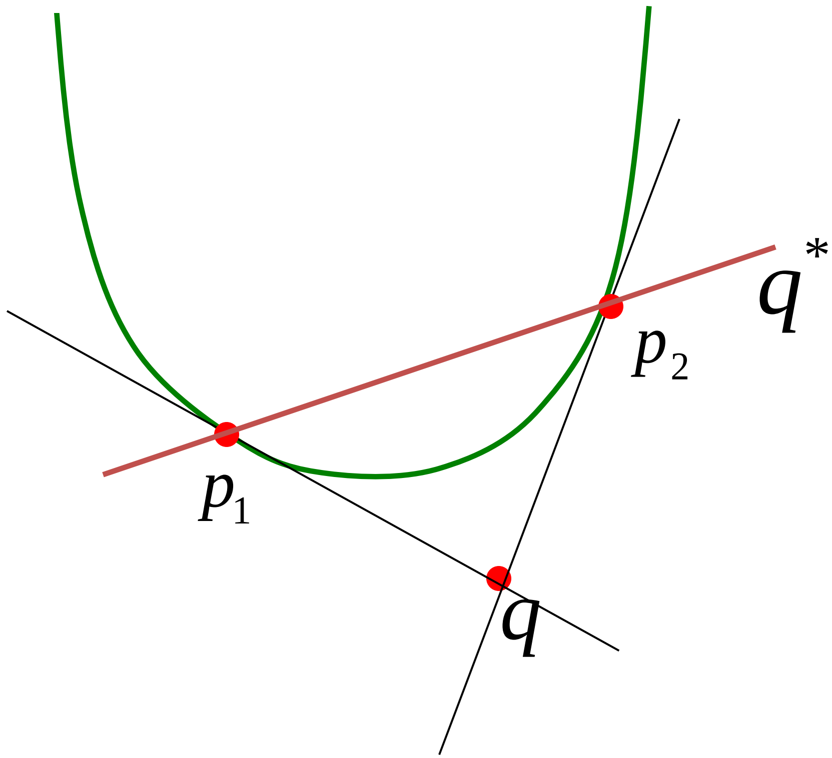
$$q' - p = p - q$$

$$q' = (p_x, p_y + d)$$

Η δυϊκή γραμμή $q^* // p^*$ και περνά από το q'.

Λίγο Ακόμα Παραβολή

$$y = \frac{x^2}{2}$$



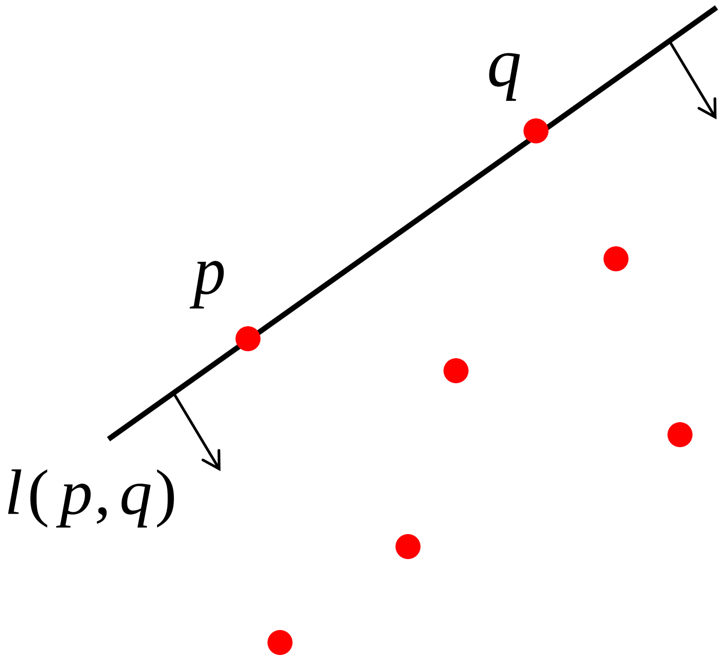
Κατασκευή δυϊκής γραμμής του *q* χωρίς μέτρηση αποστάσεων:

1) Διαμέσου του *q* φέρουμε δύο εφαπτόμενες στην παραβολή.
2) Έστω p_1 και p_2 τα εφαπτόμενα σημεία.
3) Η q^* είναι η γραμμή που διέρχεται από p_1 και p_2.

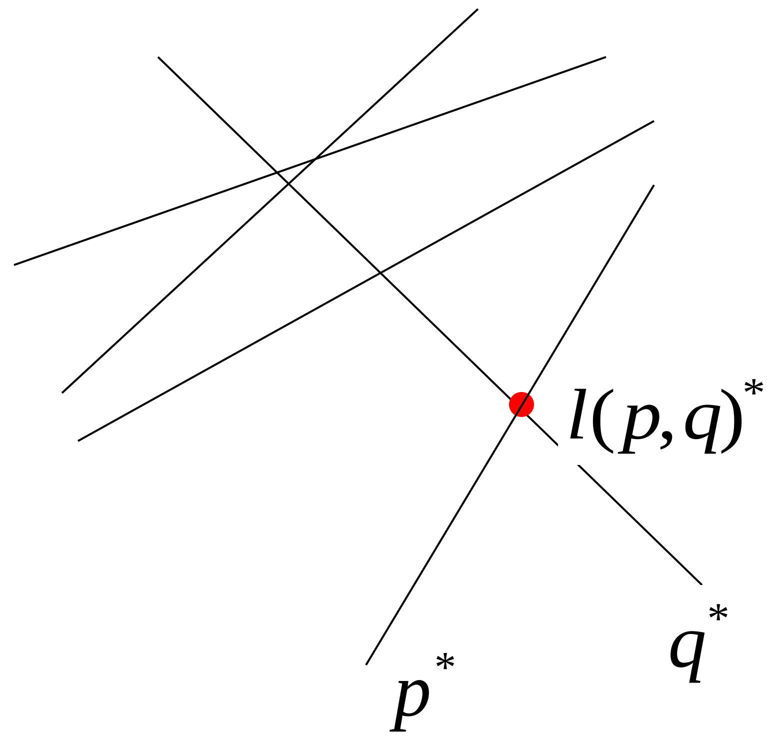
Οι δύο εφαπτόμενες είναι οι p_1^* και p_2^*.

p_1^* και p_2^* τέμνονται στο q $\Leftrightarrow$ q^* διέρχεται από τα p_1 και p_2.

Το Πρόβλημα της Απόκλισης



Υπάρχει αποδοτικός αλγόριθμος!

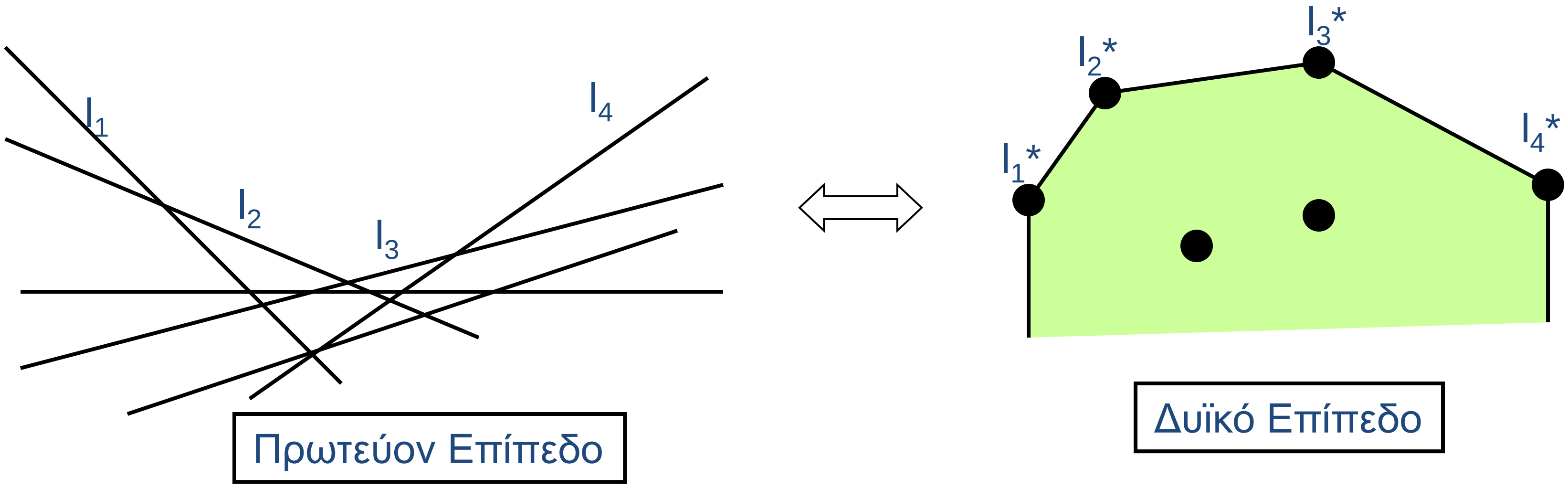


\# σημείων αυστηρά κάτω από $l(p,q)$

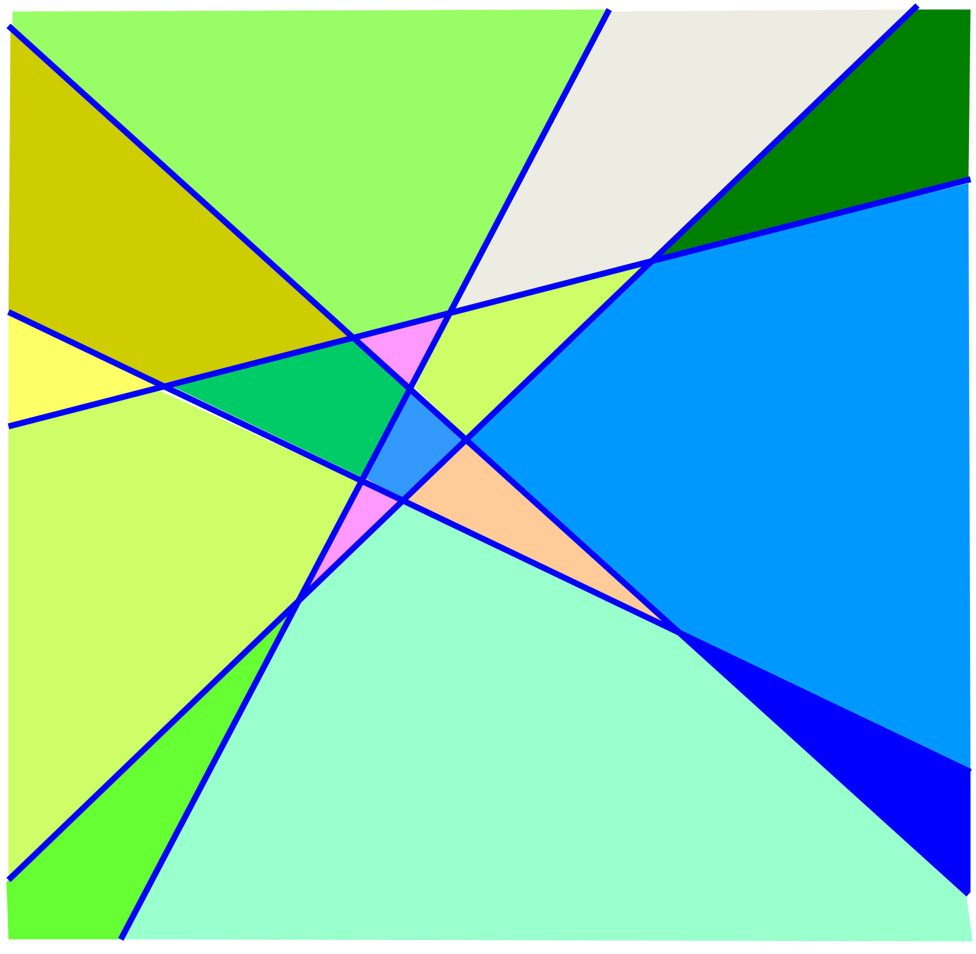
= #γραμμών αυστηρά πάνω από $l(p,q)^*$

Άλλα Προβλήματα

Πρόβλημα: Εύρεση άνω (αντίστοιχα κάτω) μέρους n δοθέντων γραμμών
Λύση: Υπολογισμός άνω (αντίστοιχα κάτω) κυρτού περιβλήματος των n δυϊκών σημείων.



Σχηματισμοί Ευθειών

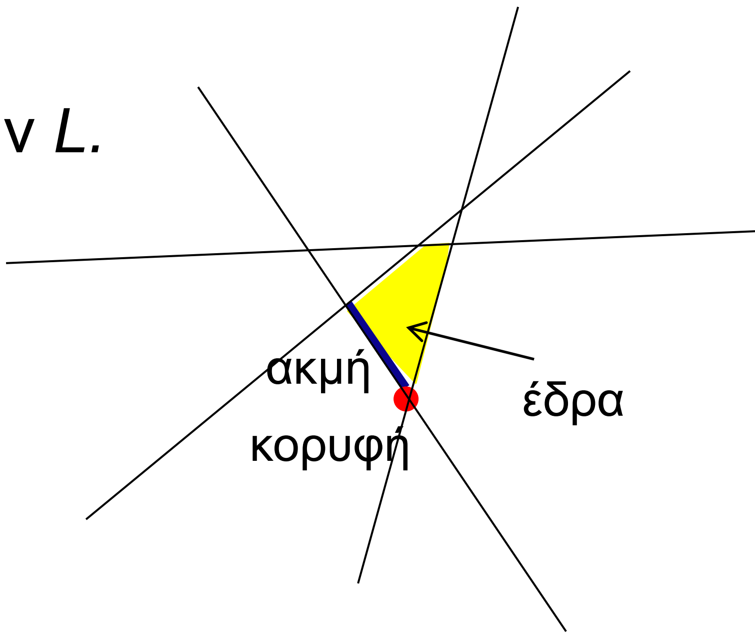


Σχηματισμοί Γραμμών

L: ένα σύνολο από *n* γραμμές.

A(*L*): επίπεδη υποδιαίρεση από την *L*.

- Με μη φραγμένες ακμές και έδρες

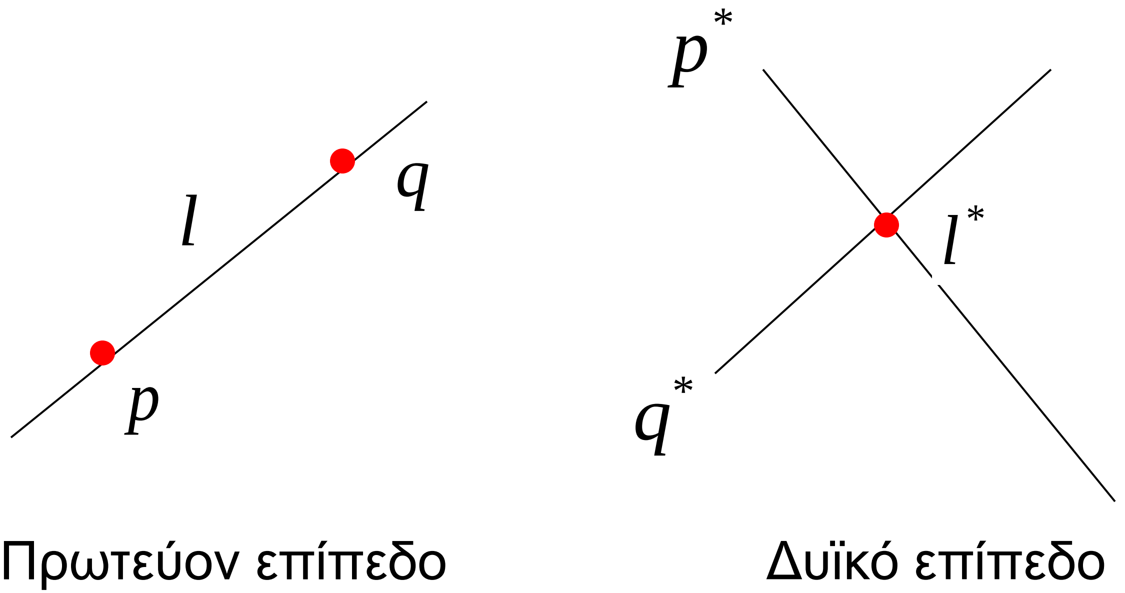


Απλή υποδιαίρεση αν

- Τρεις γραμμές δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο.
- Δεν υπάρχουν παράλληλες γραμμές.

Αναγωγή σε Σχηματισμό Γραμμών

Πρόβλημα σε σημεία ⟶ πρόβλημα σε σχηματισμό δυϊκών γραμμών.



Η δομή ενός σχηματισμού γραμμών μπορεί να είναι πιο εμφανής από τη δομή ενός συνόλου σημείων.

Συνδυαστική Πολυπλοκότητα Σχηματισμού

$\boxed{\text{\#κορυφών + \#ακμών + \#εδρών}}$

Θεώρημα: #κορυφών $\leq \dfrac{n(n-1)}{2}$

#ακμών $\leq n^2$

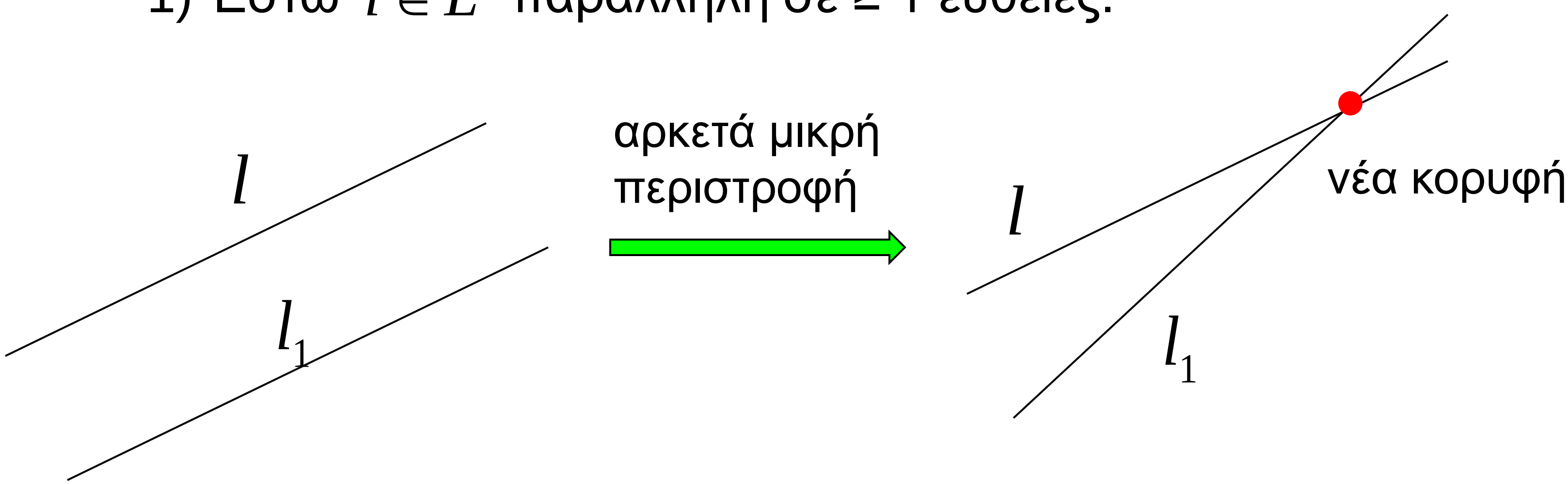
#εδρών $\leq \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{2} + 1$

Οι ισότητες ισχύουν αν ο *A*(*L*) είναι απλός.

Απόδειξη Πολυπλοκότητας

Πρώτα δείχνουμε ότι τα #κορυφών, #ακμών, #εδρών είναι μέγιστα όταν ο *A*(*L*) είναι απλός και ποτέ άλλοτε.

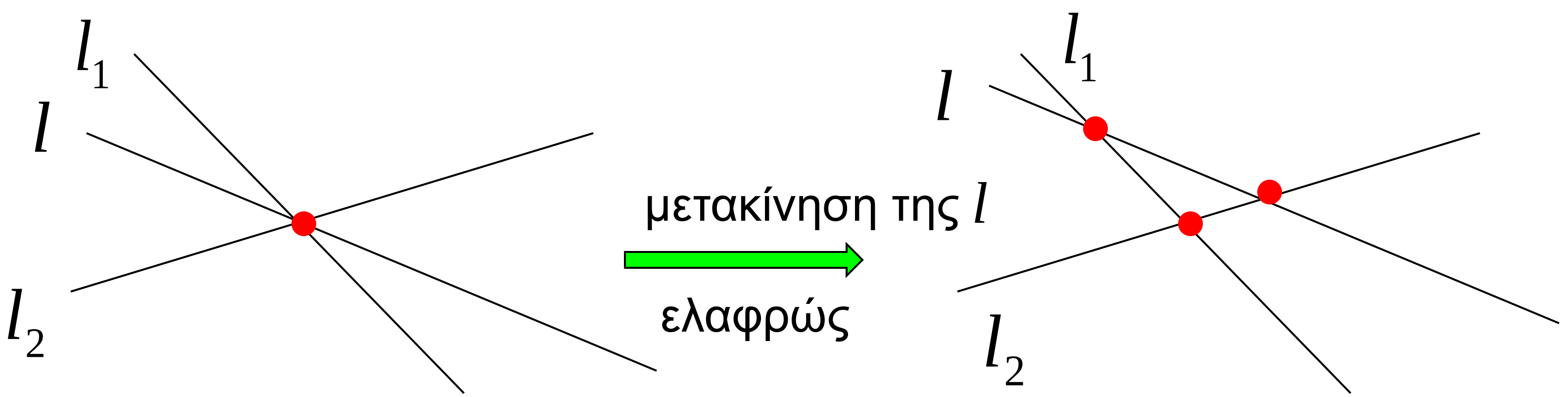
1) Έστω $l \in L$ παράλληλη σε ≥ 1 ευθείες.



Η πολυπλοκότητα αυξάνει μονάχα. (Άρα σχηματισμός με παράλληλες ευθείες δεν μπορεί να είναι μέγιστος.)

Συνέχεια

2) Έστω ότι η l διέρχεται από μία κορυφή.



2 νέες κορυφές
2 νέες ακμές
1 νέα έδρα

Αφού η πολυπλοκότητα αυξάνεται τέτοιος σχηματισμός δεν μπορεί να είναι μέγιστος.

Ο σχηματισμός με μέγιστη πολυπλοκότητα είναι απλός.

Μέγεθος ενός Απλού Σχηματισμού

$n_v =$ # κορυφών

$n_e =$ # ακμών

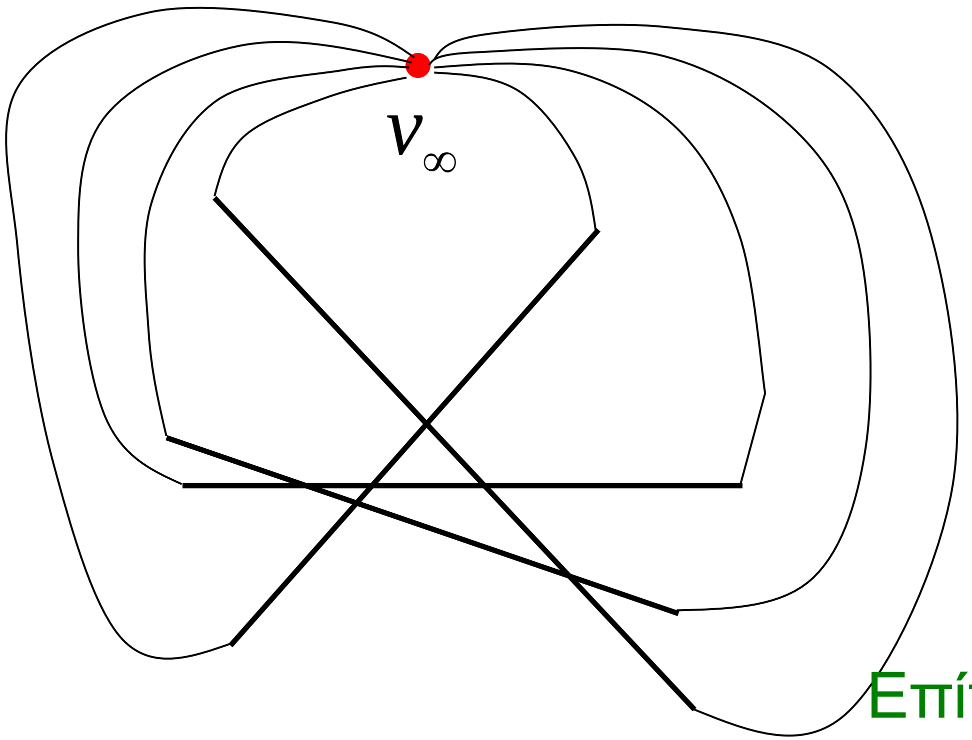
$n_f =$ # εδρών

Κάθε ζεύγος γραμμών τέμνονται. ⟹ $n_v = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

#ακμών σε κάθε γραμμή $= \underbrace{1 + \text{\#τομών σε γραμμή}}_{n-1}$

⟹ $n_e = n \cdot (1 + n - 1) = n^2$

Πλήθος Εδρών



1.Πρόσθεση v_∞ στο άπειρο.

2. Σύνδεση των άκρων κάθε ακμής προς την v_∞.

Δεν δημιουργούνται νέες τομές.

Επίπεδο γράφημα: (Θεώρημα Euler)

$$(n_v+1)+n_f-n_e=2 \Longrightarrow$$

$$n_f = 2-(n_v+1)+n_e$$

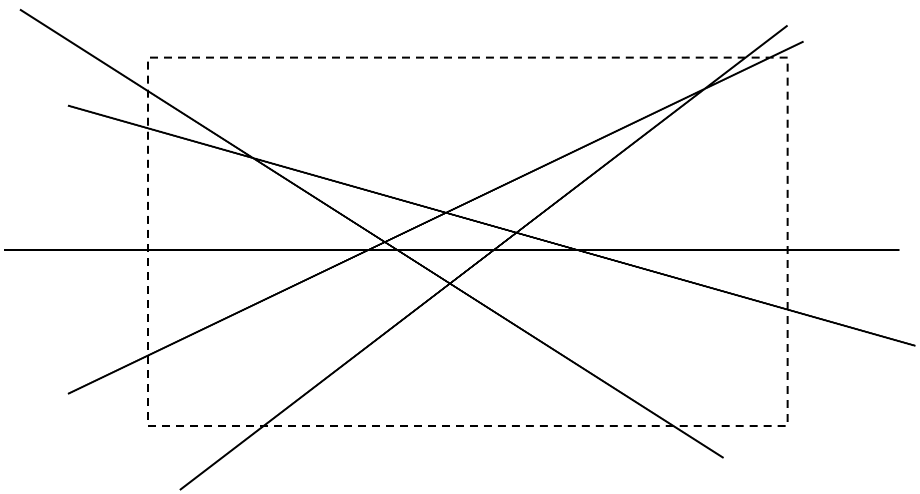
$$= 2-\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)+n^2$$

$$\boxed{= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1}$$

Αποθήκευση Σχηματισμού

Διπλοσυνδεδεμένη λίστα ακμών.

Πρόσθεση περιφρακτικού ορθογωνίου ώστε όλες οι κορυφές να είναι στο εσωτερικό.



Κατασκευή ΔΛΑ για τον $A(L)$

Επίπεδη Σάρωση;

$$O(n\log n + I\log n)$$

Τομές ανά δύο γραμμές ⇨ $I = n(n-1)/2$

Δεν είναι βέλτιστο (κατά log$n$)!

Αυξητικός Αλγόριθμος

Preprocessing

- Υπολογισμός περιφρακτικού ορθογωνίου *B*(*L*). $\Theta(n^2)$

  - n^2 τομές.

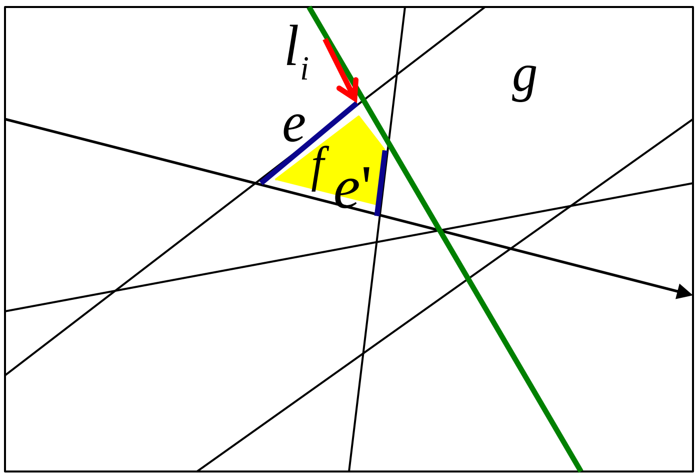
  - αριστερότερη, δεξιότερη, ανώτατη, κατώτατη τομές.

- Πρόσθεση γραμμών $l_1, l_2, \ldots, l_n$ μία-μία.

  Ενημέρωση της διπλοσυνδεδεμένης λίστας μετά από κάθε πρόσθεση.

Ενημέρωση της Υποδιαίρεσης

A_i : Υποδιαίρεση λόγω του $\{l_1, l_2, \ldots, l_i\}$

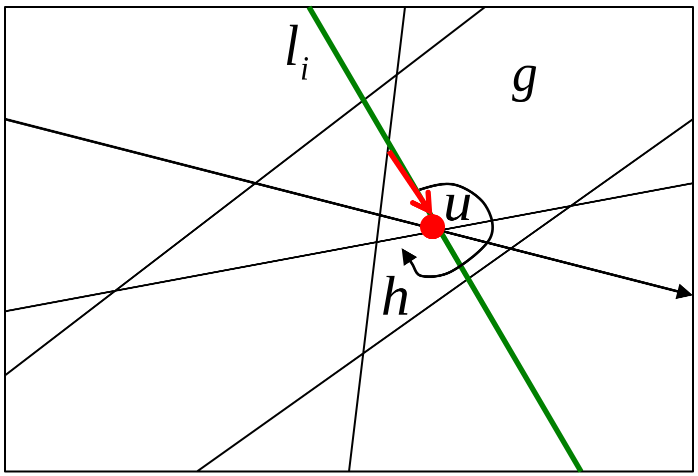


Περίπτωση 1 στην έδρα *f* μέσω της *e*.

- σαρώνουμε το σύνορο της *f*.
- βρίσκουμε την ακμή εξόδου *e*΄.
- Εισερχόμαστε στην έδρα *g*.

Ενημέρωση της Υποδιαίρεσης

Περίπτωση 2 εξερχόμαστε από την έδρα *g* μέσω κορυφής *u*.



- περνάμε γύρω από την *u* για να βρούμε την επόμενη έδρα *h* που τέμνεται από την l_i

Πρώτη Ακμή Τομής

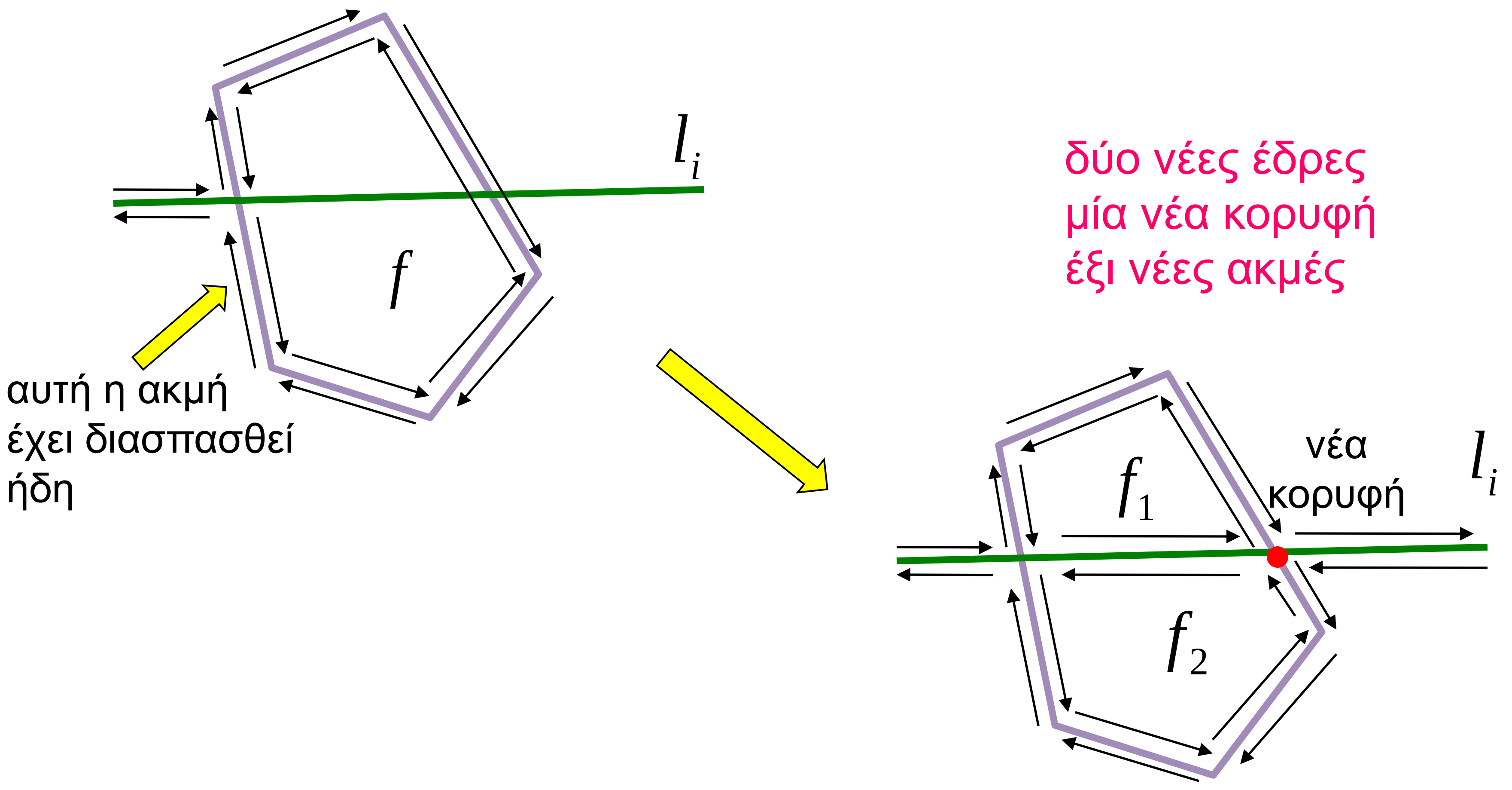
Πώς βρίσκουμε την πρώτη ακμή (αριστερότερη) που τέμνεται από l_i ;

- Θα πρέπει να είναι ακμή στο περιφρακτικό ορθογώνιο *B*(*L*).
- Απλός έλεγχος όλων των ακμών του *B*(*L*).
- Αν η l_i είναι κάθετη, βρίσκουμε την κατώτατη τομή για την εκκίνηση της διαπέρασης.

A_i: έχει $2(i-1)+4$ ακμές στο *B*(*L*) αφού κάθε ακμή το τέμνει δύο φορές.

Η πρώτη ακμή τομής βρίσκονται σε *O*(*i*) χρόνο.

Διάσπαση Έδρας



Ο Αλγόριθμος

ΚατασκευήΣχηματισμού(*L*)

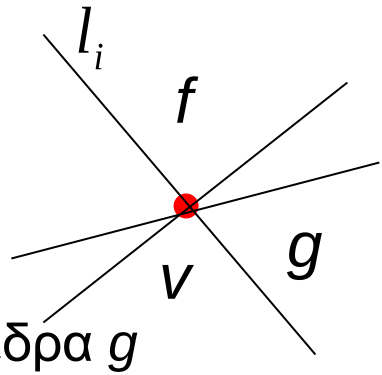
1. Υπολογισμός περιφρακτικού ορθ. *B*(*L*) που περιέχει όλες τις κορυφές του *A*(*L*) // $O(n^2)$
2. Αρχικοποίηση της DCEL για το *B*(*L*) // *O*(1)
3. Για *i* ← 1 έως *n*
4. *e* ← ακμή του *B*(*L*) που τέμνει την l_i
5. *f* ← φραγμένη έδρα που προσπίπτει στην *e* // *O*(*i*)
6. Όσο η *f* είναι φραγμένη
7. διάσπαση *f*
8. *f* ← επόμενη τεμνόμενη έδρα

Διάσπαση Έδρας

Διάσπαση εδρών στον A_{i-1} που τέμνονται από την l_i .

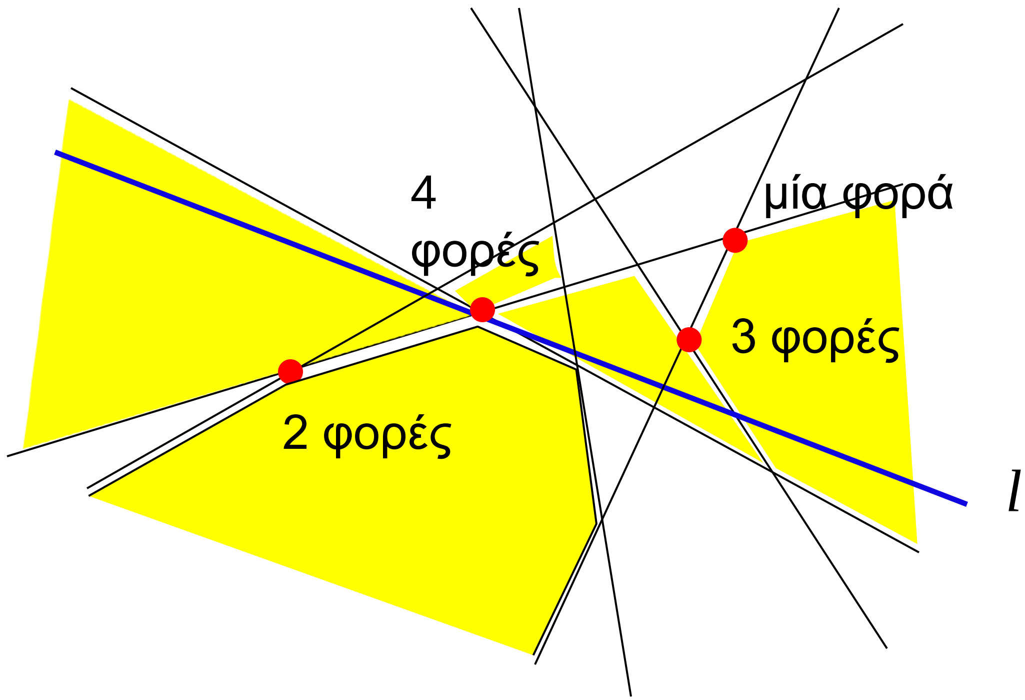
- Απλό *A*(*L*)
  - Η διάσπαση της έδρας *f* και η εύρεση της επόμενης τεμνόμενης έδρας χρειάζεται γραμμικό χρόνο ως προς την πολυπλοκότητα της *f*.
  - Ένθεση της l_i χρειάζεται γραμμικό χρόνο στη συνολική πολυπλοκότητα των εδρών που τέμνονται από τη γραμμή.

- Μη Απλό *A*(*L*)
  - Η l_i μπορεί να εξέρχεται της *f* μέσω της *v* όπου ≥ 3 γραμμές μαζί με την l_i τέμνονται.
  - Διαπερνούμε τις ακμές της *v* για να βρούμε την έδρα *g* που θα διασπάσουμε, διαπερνώντας τις ακμές εδρών που τέμνονται από την l_i .



Ζώνη

$Z(l)$ = { f | f είναι μία έδρα του $A(L)$ που τέμνονται από την l }



Πολυπλοκότητα Z = συνολική πολυπλοκότητα εδρών (#κορυφών + #ακμών)

Μία κορυφή μπορεί να μετρηθεί το πολύ 4 φορές.

Χρόνος για Κατασκευή Σχηματισμού

Θεώρημα Ζώνης: Η πολυπλοκότητα της ζώνης σε έναν σχηματισμό *m* γραμμών είναι $O(m)$.

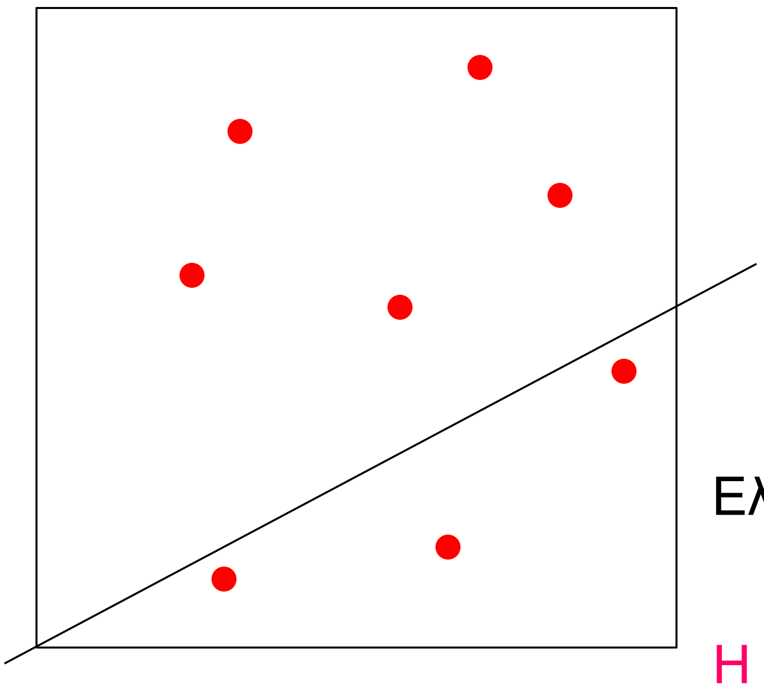
Απόδειξη: Με επαγωγή.

Άρα ο χρόνος πρόσθεσης μίας γραμμής απαιτεί $O(i)$ χρόνο.

Χρόνος πρόσθεσης όλων των γραμμών (χρόνος κατασκευής σχηματισμού):

$$\sum_{i=1}^{n} O(i) = O(n^2)$$

Λύση για το Πρόβλημα της Απόκλισης



Συνεχές μέτρο: $\mu(h) = \frac{1}{4}$

Διακριτό μέτρο: $\mu_s(h) = \frac{3}{8}$

Ελαχιστοποίηση $|\mu_s(h) - \mu(h)|$

Η *h* πρέπει να έχει ≥ 1 σημείο στο σύνορο

- ☆ Ακριβώς ένα σημείο $\Rightarrow$ εξαντλητική αναζήτηση $O(n^2)$
- ☆ Τουλάχιστον δύο σημεία $\Rightarrow$ δυϊκότητα

Πώς Χρησιμοποιούμε την Δυϊκότητα;

Ένα σύνολο S από n δειγματικά σημεία

⇨ Ένα σύνολο S^*, n γραμμών

Μία γραμμή πάνω σε ≥ 2 δειγματικά σημεία

⇨ Μία κορυφή στο σχηματισμό $A(S^*)$

Αφού το p κείται πάνω από την l αν και μόνο αν το l^* κείται πάνω από την p^*, το πρόβλημα της απόκλισης ανάγεται στο εξής:

Πρόβλημα: Για κάθε κορυφή στον $A(S^*)$, υπολόγισε το πλήθος των γραμμών πάνω από αυτό, κάτω από αυτό και διαμέσου αυτού.

Αναγωγή

n_a :   # γραμμών πάνω από την κορυφή

n_b :   # γραμμών κάτω της κορυφής

n_o :   # γραμμών που περιέχουν την κορυφή

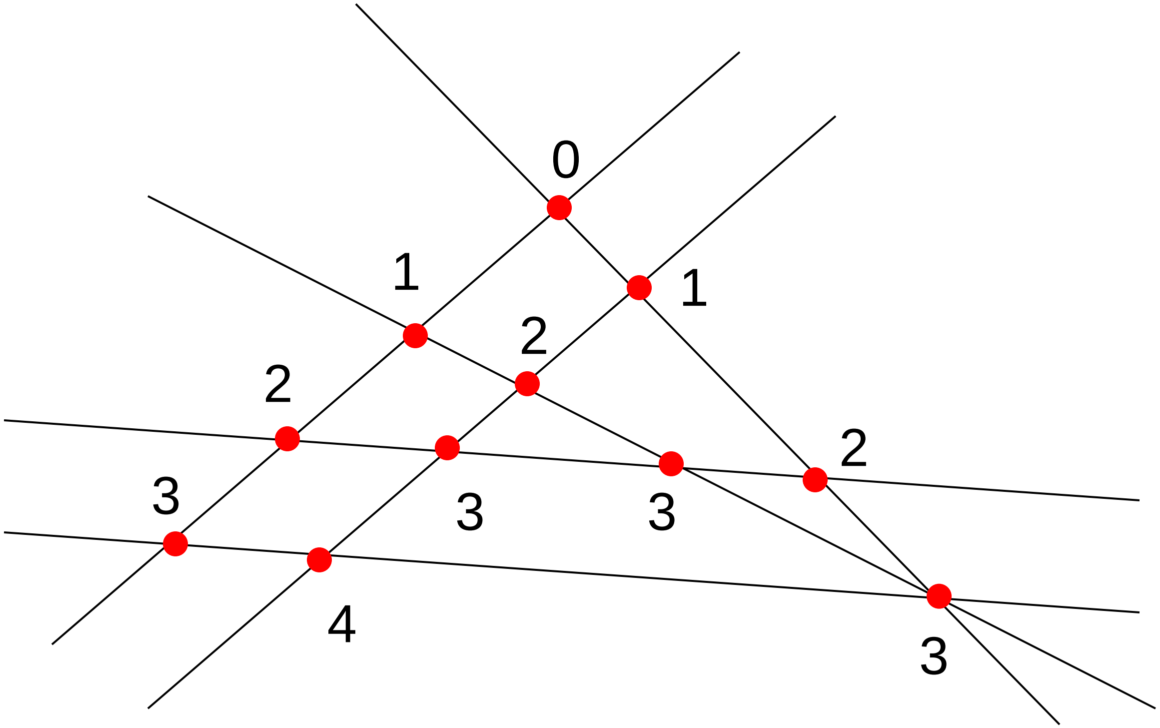
☆ Φτάνει να υπολογίσουμε 2 από τους 3 αριθμούς (άθροισμα *n*).

☆ n_o : είναι γνωστό από την διπλοσυνδεδεμένη λίστα

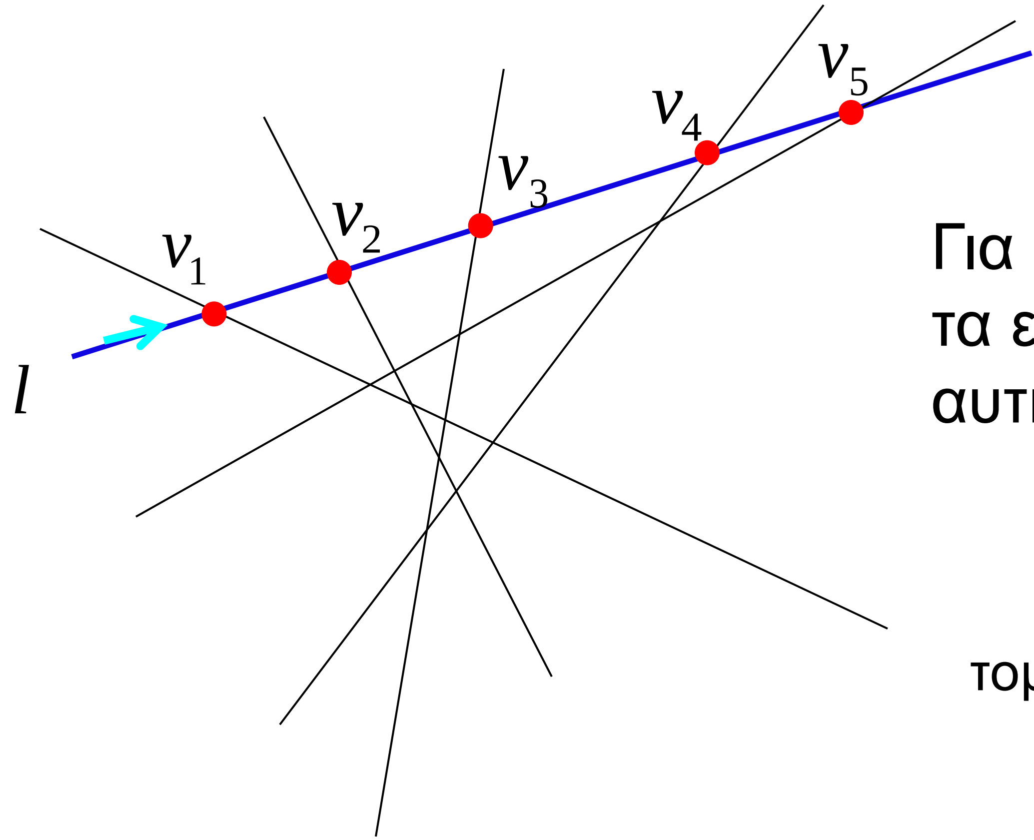
Αρκεί να υπολογίσουμε το επίπεδο n_a κάθε κορυφής του *A*(*S**).

Επίπεδα Κορυφών σε ένα Σχηματισμό

επίπεδο σημείου = # γραμμών αυστηρά από πάνω.



Μέτρηση Επιπέδου Κορυφών

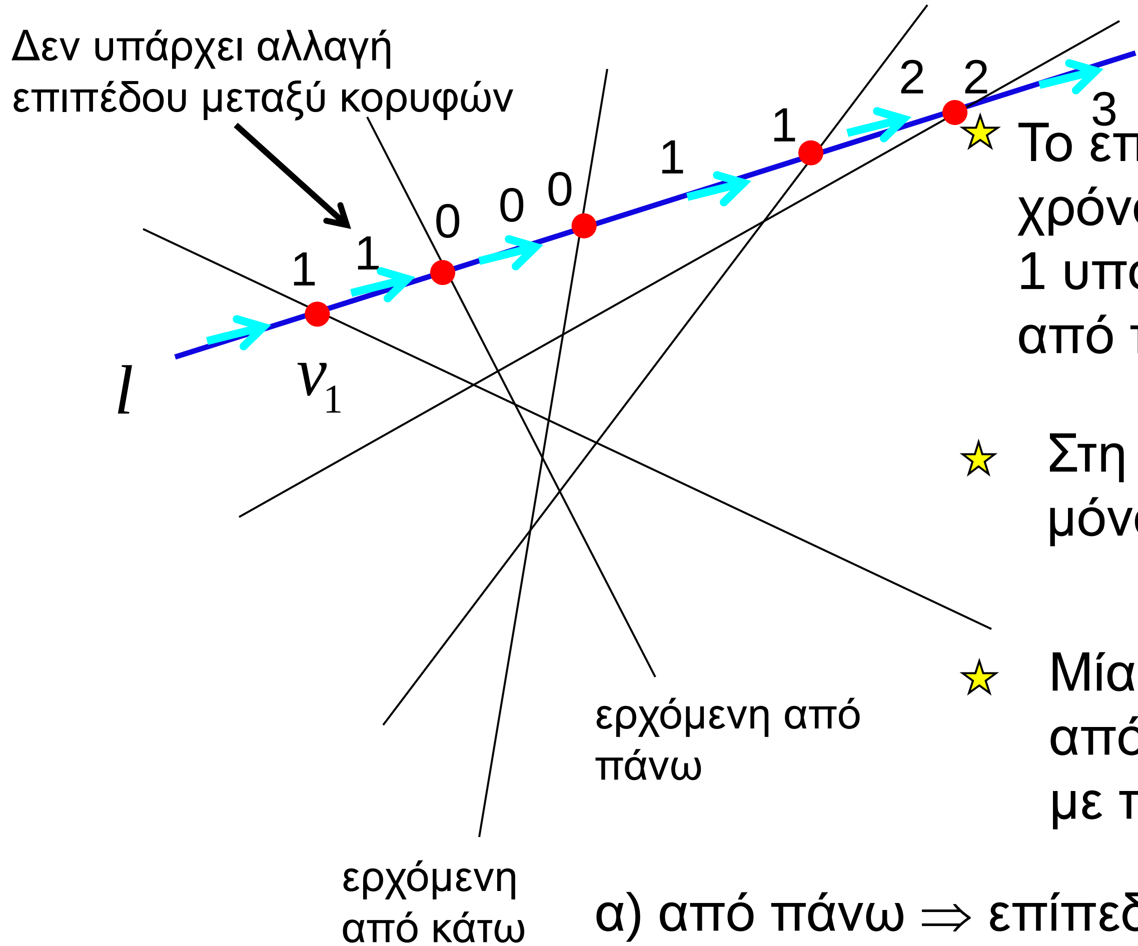


Για κάθε γραμμή *l*, υπολόγισε τα επίπεδα των κορυφών σε αυτή

$$\underbrace{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}}_{\text{τομή με } n-1 \text{ άλλες γραμμές}}$$

Στρατηγική: διατρέχουμε την *l* από αριστερά προς δεξιά.

Μέτρηση Επιπέδου Κορυφών



- ☆ Το επίπεδο(v_1) καθορίζεται σε $O(n)$ χρόνο ελέγχοντας πόσες από τις n–1 υπόλοιπες γραμμές είναι πάνω από την v_1
- ☆ Στη γραμμή το επίπεδο αλλάζει μόνο στη κορυφή v_i.
- ☆ Μία γραμμή στο v_i είναι είτε από πάνω ή από κάτω (σχετικά με την τρέχουσα θέση διαπέρασης

α) από πάνω $\Rightarrow$ επίπεδο(v_{i+1}) = επίπεδο(v_i) – 1

β) από κάτω $\Rightarrow$ επίπεδο(v_{i+1}) = επίπεδο(v_i) + 1

Χρόνος Εκτέλεσης

Το επίπεδο των κορυφών σε μία γραμμή γίνεται σε O(n) χρόνο.

Τα επίπεδα όλων των κορυφών σε ένα σχηματισμό γραμμών υπολογίζεται σε O(n^2) χρόνο.

Το διακριτό μέτρο υπολογίζεται σε O(n^2) χρόνο.