ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ Ι

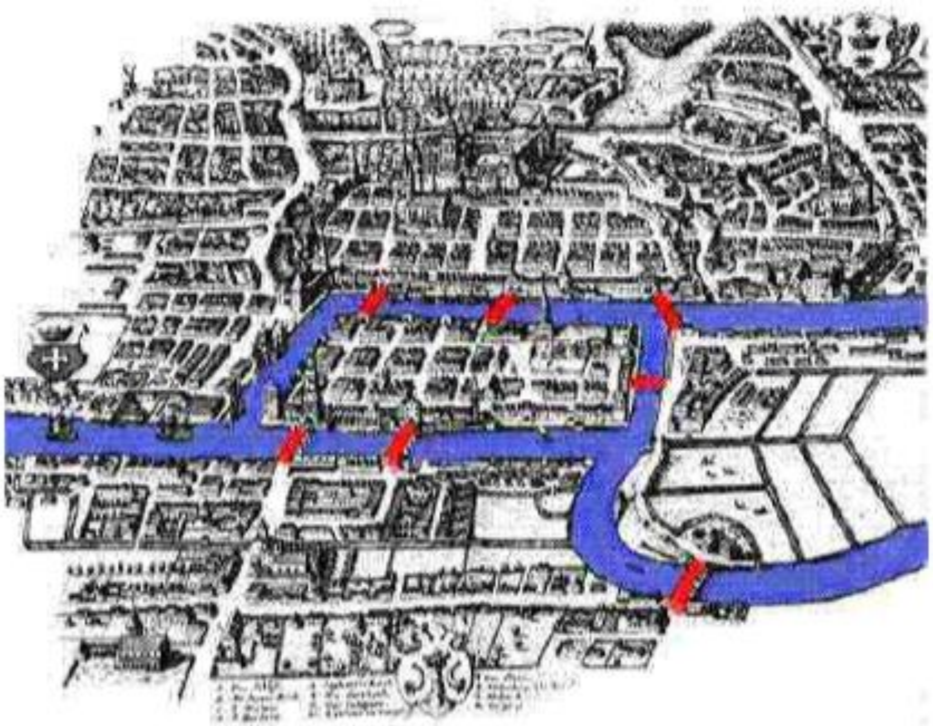
Εισαγωγή

- ***Θεωρία γραφημάτων*** (graph theory)
- Μαθηματικό εργαλείο
- Εφαρμογή σε πολλά επιστημονικά πεδία
- Χρησιμεύουν για περιγραφή δομών και σχέσεων ανάμεσα σε αντικείμενα και οντότητες
- Ενδεικτικές εφαρμογές:
  - πληροφορική για περιγραφή δικτύων και αλγορίθμων
  - στην επιχειρησιακή έρευνα για τον σχεδιασμό χρονοδιαγραμμάτων
  - στη χημεία για την περιγραφή μοριακών δομών
- Άμεση σχέση με την συνδυαστική ανάλυση
  - Οι αποδείξεις πολλών θεωρημάτων βασίζονται στις αρχές της απαρίθμησης
  - Πολλές συνδυαστικές δομές περιγράφονται αποτελεσματικά με γραφήματα

Γέννηση θεωρίας γραφημάτων

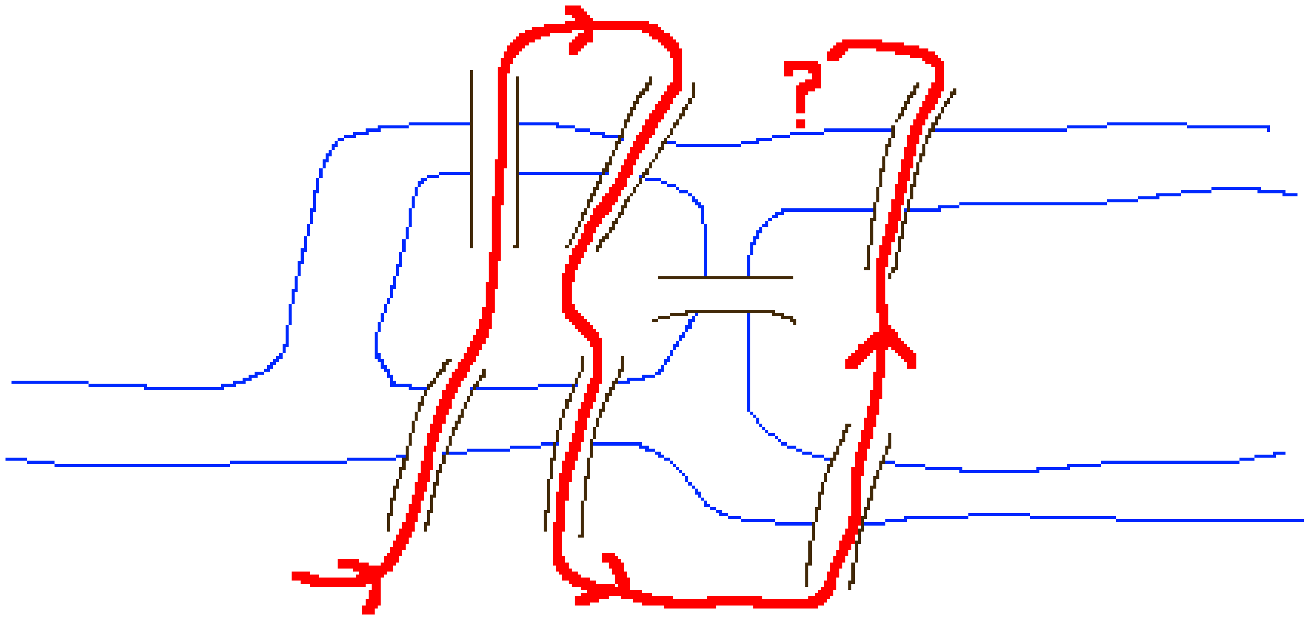
- Από την εργασία του Ελβετού μαθηματικού Leonhard Euler (1707 - 1783)
- Θεμελιώδης εργασία: "*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*" (Η λύση ενός προβλήματος που αναφέρεται στη γεωμετρία της θέσης – 1736)

Οι γέφυρες του Königsburg



- Σημερινό Kalingrad (στη Βαλτική μεταξύ Λιθουανίας και Πολωνίας)

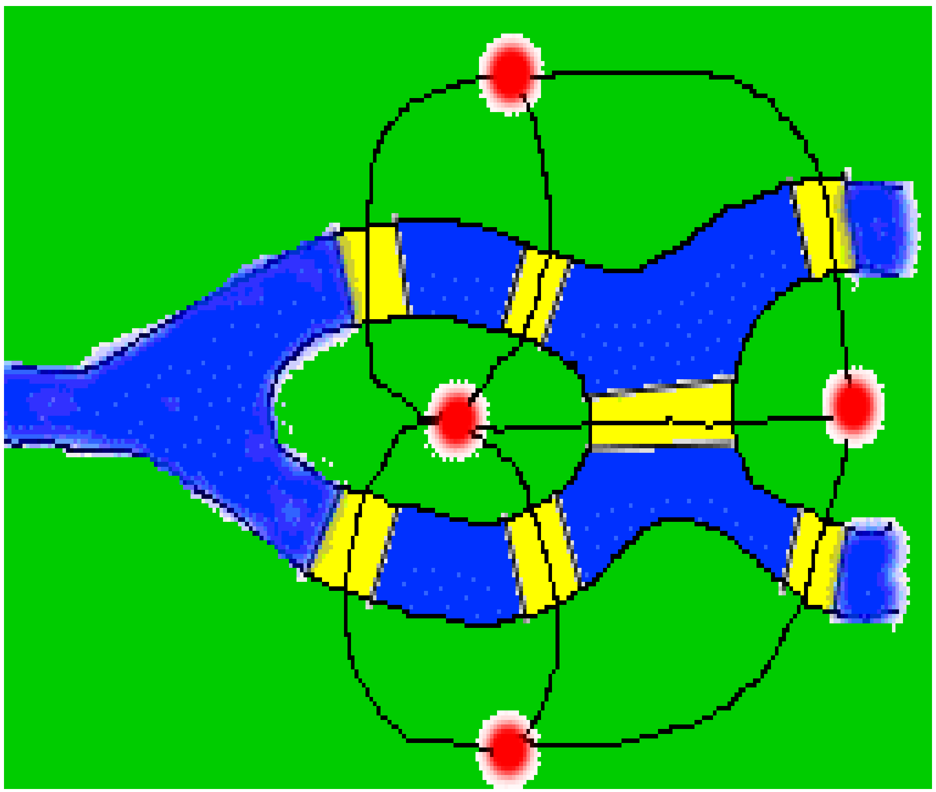
Βολτάροντας…

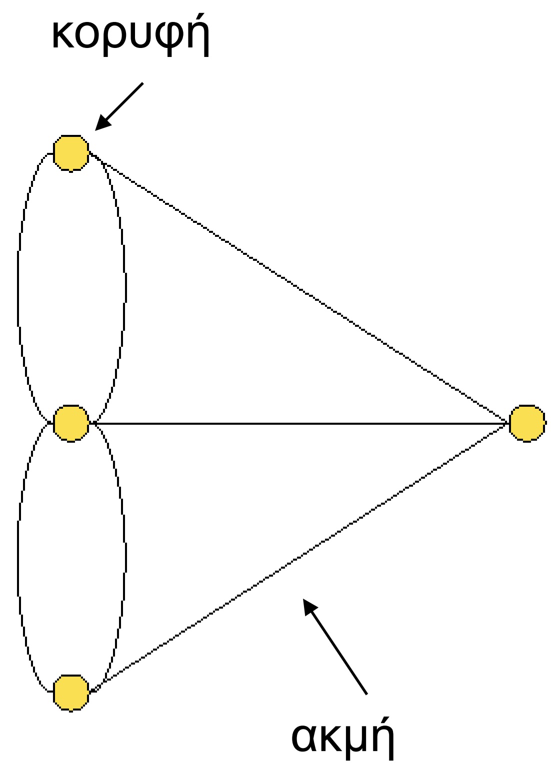


Λύση:
Leonhard Euler (1707-1783)

- Μεγάλος μαθηματικός σε όλα τα πεδία
- 73 τόμοι δημοσιεύσεων

Το γράφημα





Ο Λύκος, η κατσίκα και το λάχανο…

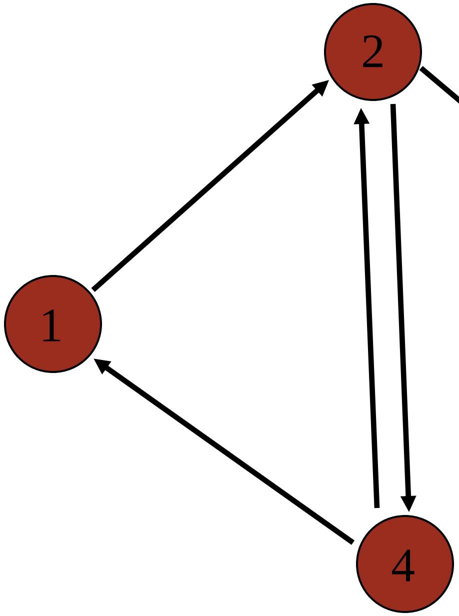
- Ένας ταξιδιώτης έχει έναν λύκο, μία κατσίκα και ένα λάχανο που πρέπει να περάσει από ένα ποτάμι. Το πρόβλημα είναι ότι αν μείνουν μόνα τους, ο λύκος τρώει το κατσίκι, ή το κατσίκι τρώει το λάχανο. Η βάρκα χωράει μόνο δύο, ένας εκ των οποίων είναι ο ταξιδιώτης.

Πώς θα τα περάσει ο ταξιδιώτης απέναντι;

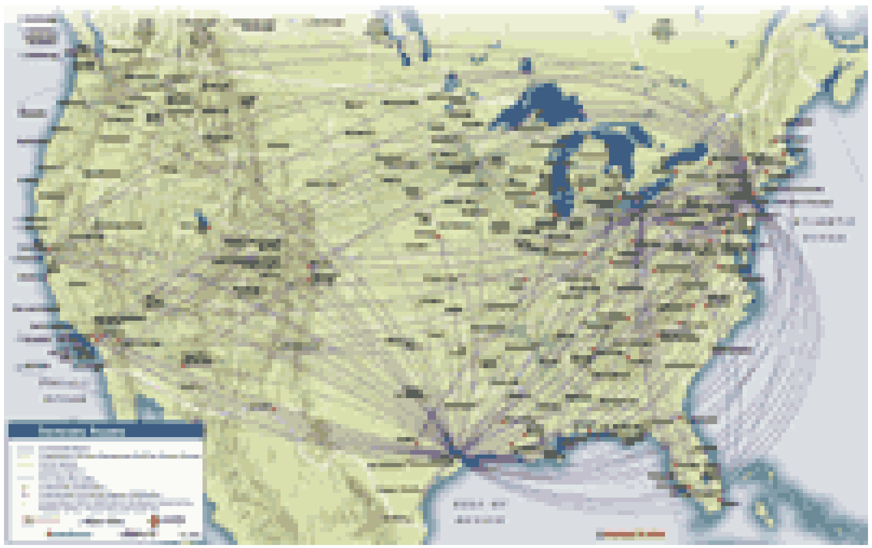
Μερικές Εφαρμογές γραφημάτων

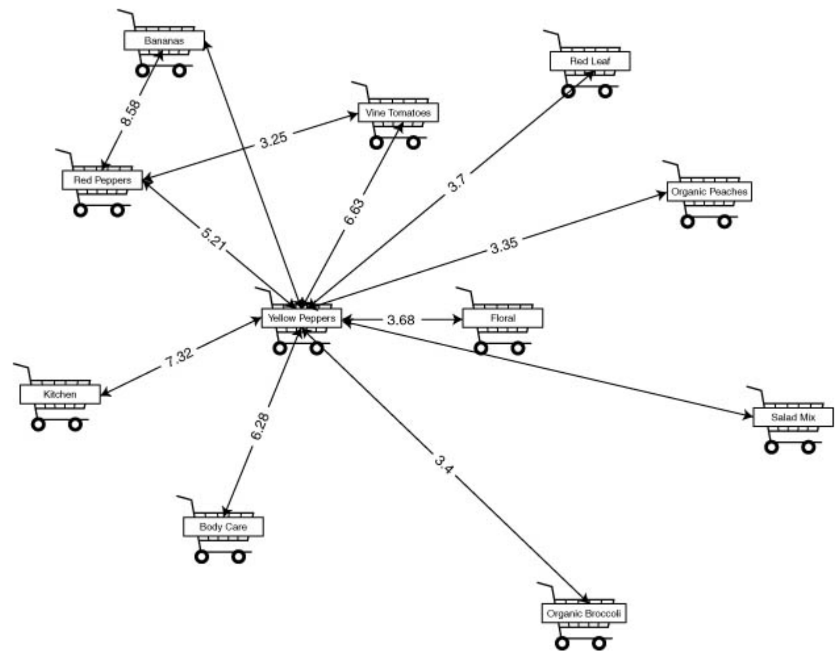
Εφαρμογή	Κορυφές	Ακμές	Ροή
Επικοινωνία	Υπολογιστές, τηλεφωνικό δίκτυο, δορυφόροι	Καλώδια, οπτικές ίνες, ασύρματα	Φωνή, Εικόνα, πακέτα
Κυκλώματα	Πύλες, Καταχωρητές, CPU	Καλώδια	Ρεύμα
Μηχανική	Σύνδεσμοι	Δοκοί, ακτίνες, ελατήρια	Ενέργεια, Θερμότητα
Υδραυλική	Λίμνες, Ταμιευτήρες, Σταθμοί άντλησης	Σωληνώσεις	Νερό, Πετρέλαιο
Οικονομικά	Νόμισμα, Μετοχές	Συναλλαγές	Κεφάλαιο
Μεταφορές	Αεροδρόμια, διασταυρώσεις, σταθμοί τρένων	Αεροδιάδρομοι, γραμμές τρένου, δρόμοι	Φορτία, οχήματα, επιβάτες

Κατευθυνόμενο γράφημα



Συνδεσμικότητα

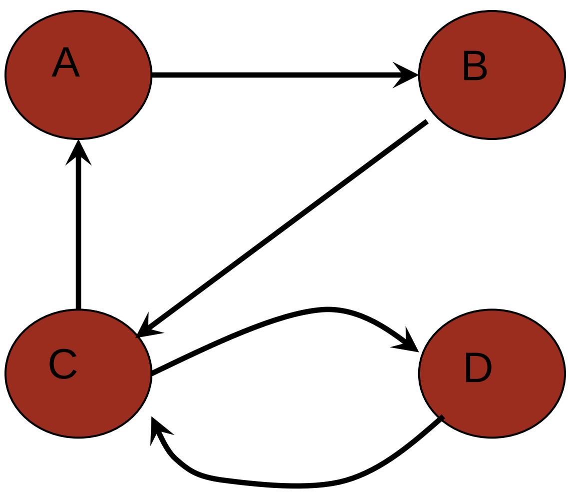




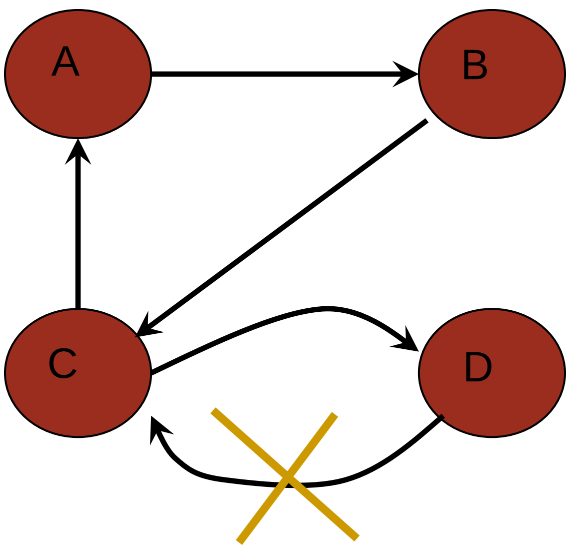
Μπορώ να πετάξω από την πόλη Α στην πόλη Β με την εταιρία;

Υπάρχει διαδρομή από την πόλη Α στην πόλη Β στο δίκτυό της;

Λειτουργία δικτύων

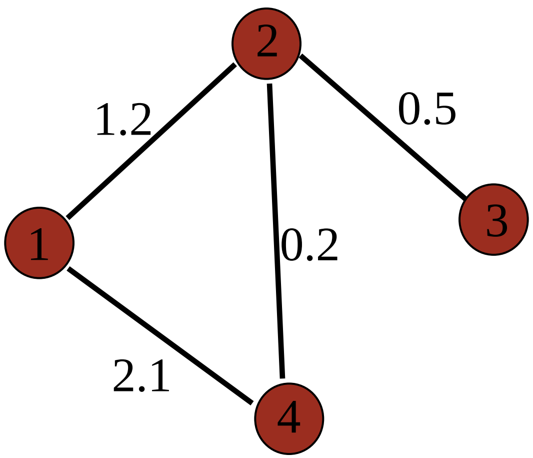


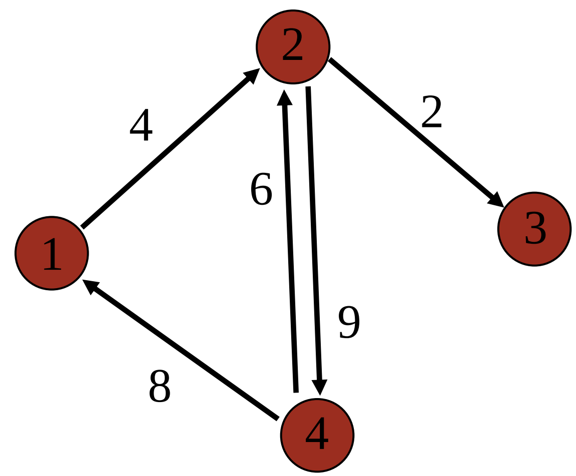
Μπορώ να πάω από κάθε κόμβο σε κάθε άλλον;



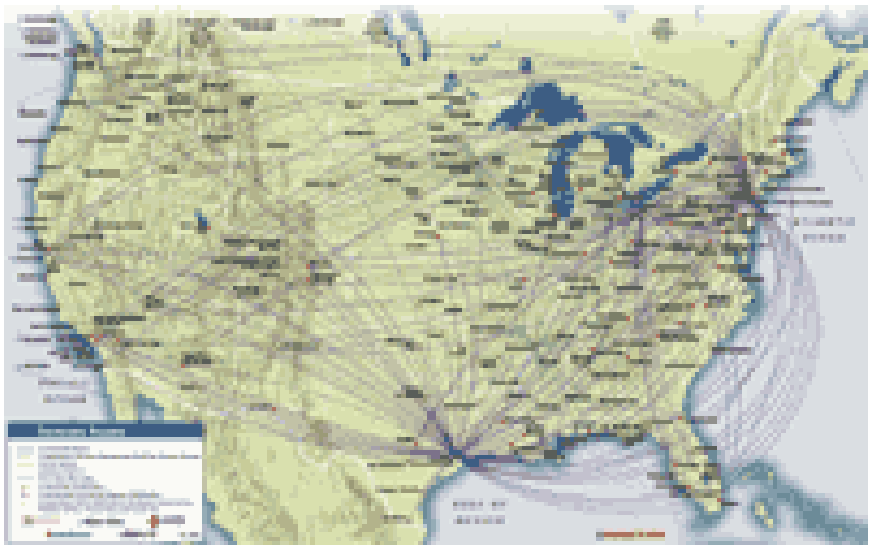
Βλάβη

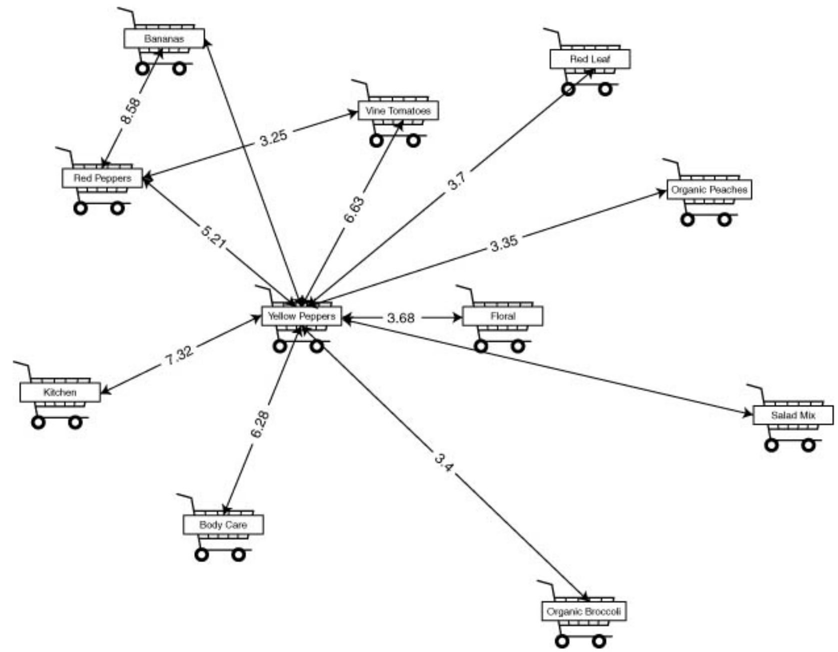
Ζυγισμένο γράφημα (weighted)





Συντομότερη διαδρομή





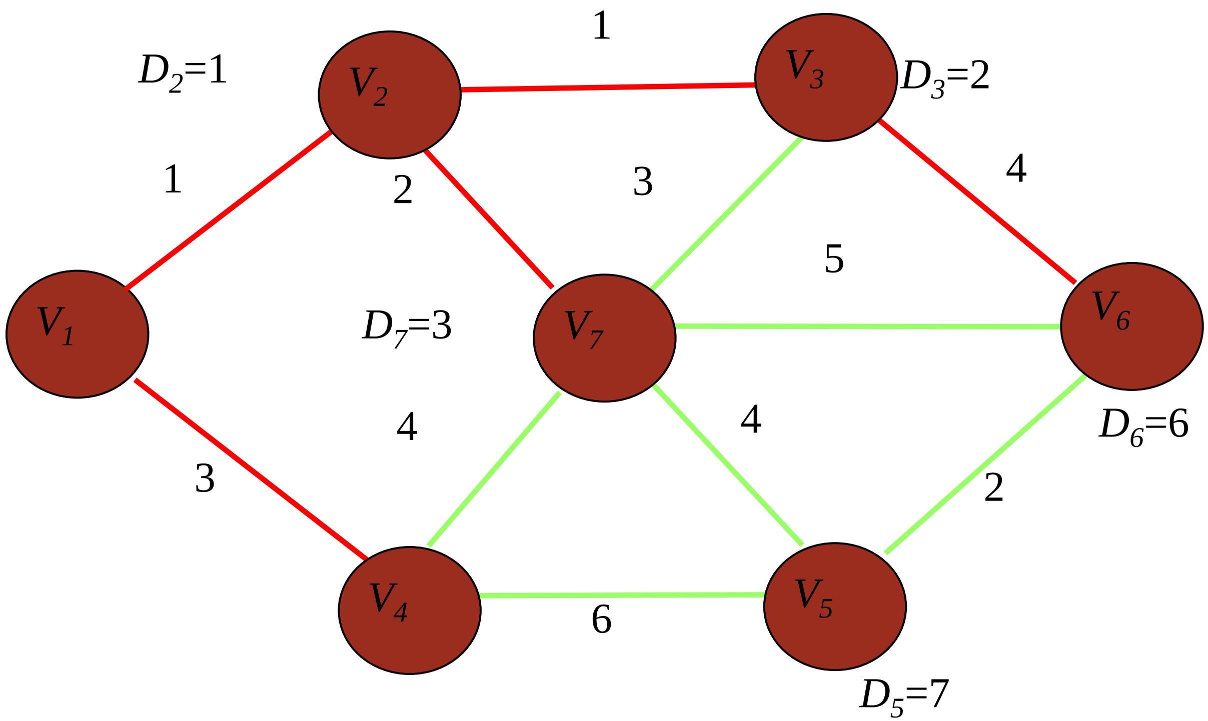
Ποια είναι η συντομότερη διαδρομή από την πόλη Α στην πόλη Β με την εταιρία;

Ποια διαδρομή από την πόλη Α στην πόλη Β έχει το μικρότερο βάρος;

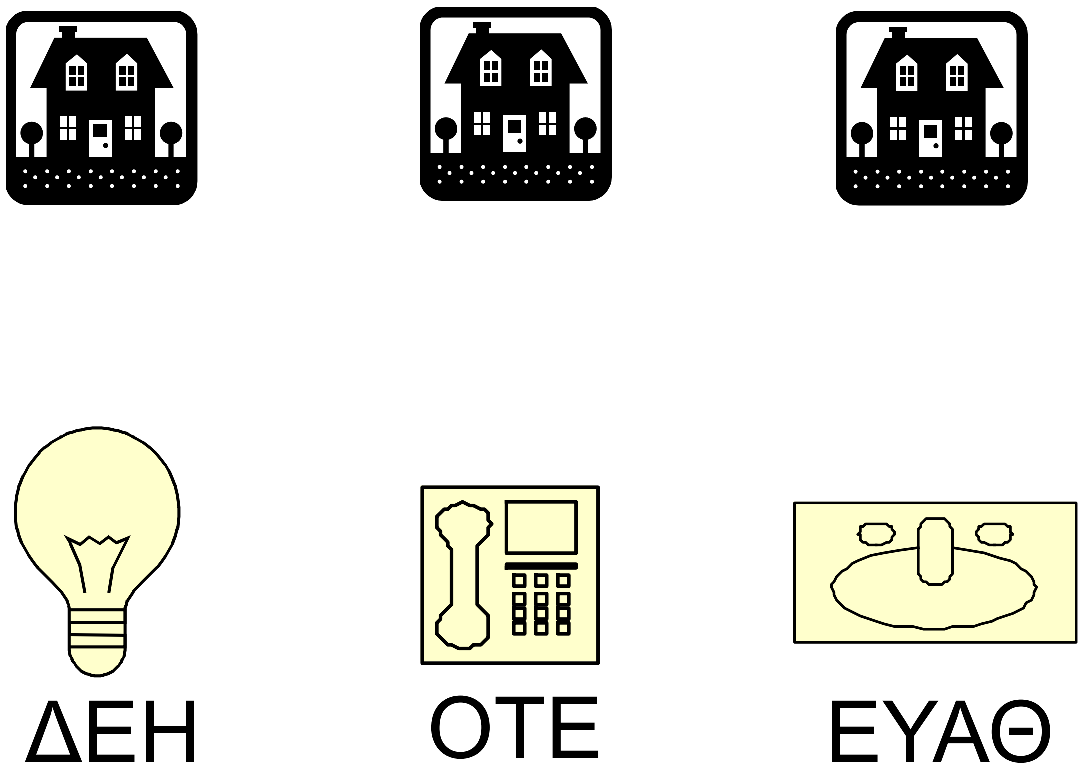
GPS – Navigation

Εύρεση Ελαχίστων Διαδρομών…

Δρομολόγηση στο Internet (TCP/IP)

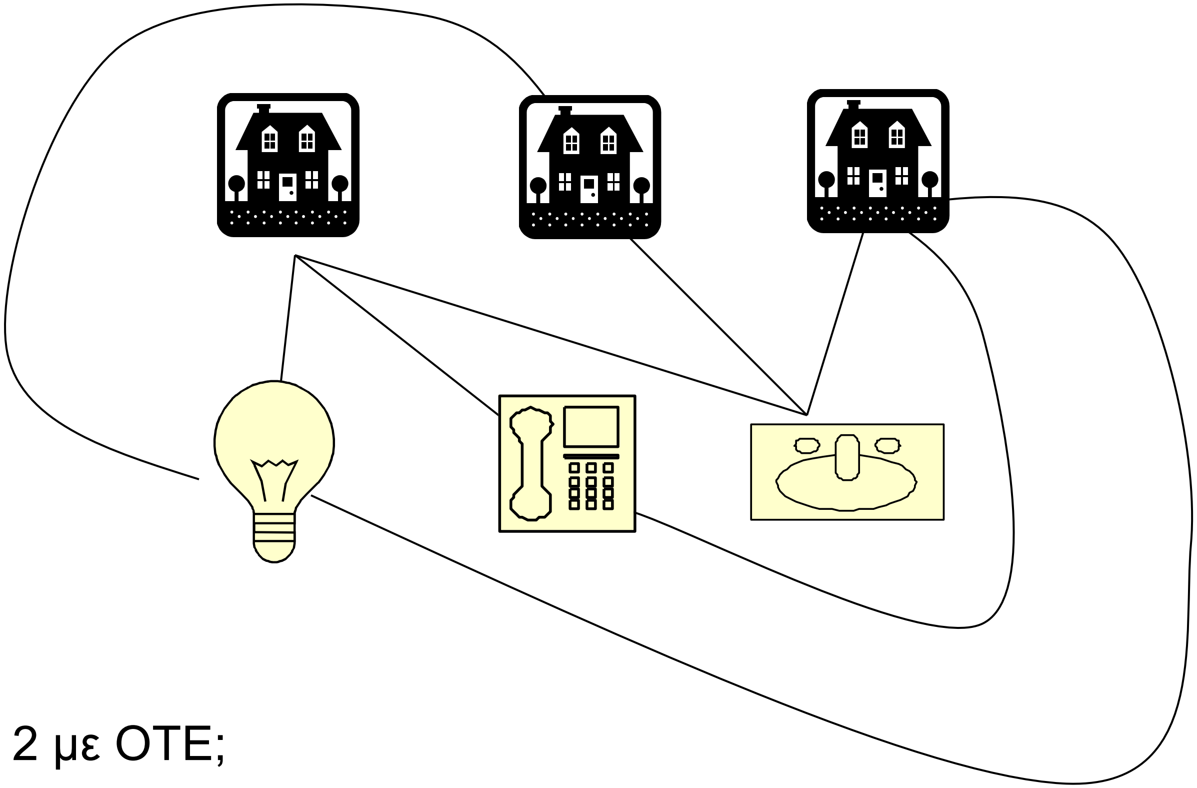


Γρίφος



Σύνδεσε όλα τα σπίτια χωρίς να διασταυρωθούν οι συνδέσεις

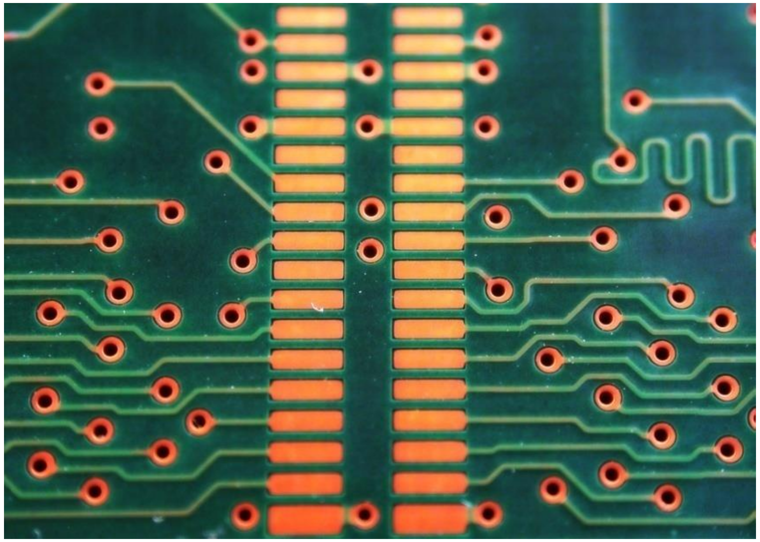
Προσπαθήστε…



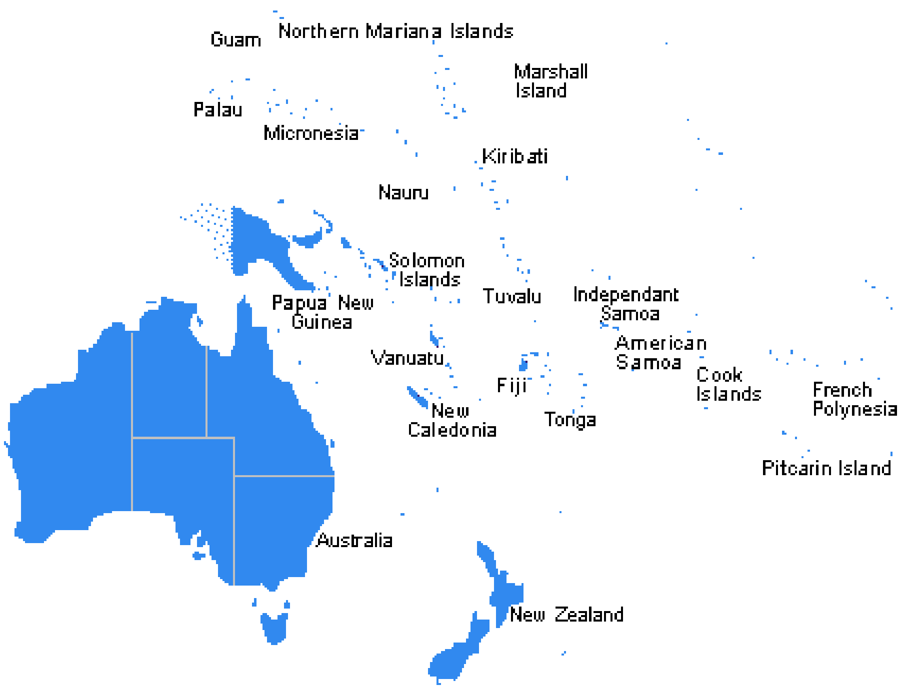
Σπίτι 2 με ΟΤΕ;

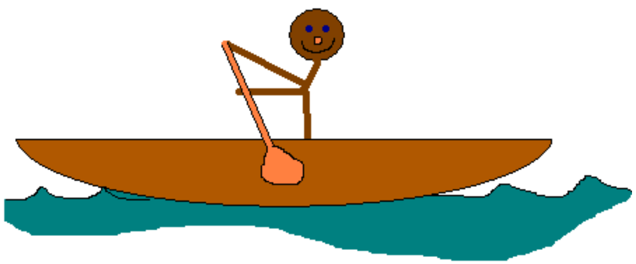
Επιπεδικότητα

- Μπορεί ένα γράφημα να σχεδιαστεί ώστε να μην υπάρχουν τεμνόμενες ακμές;



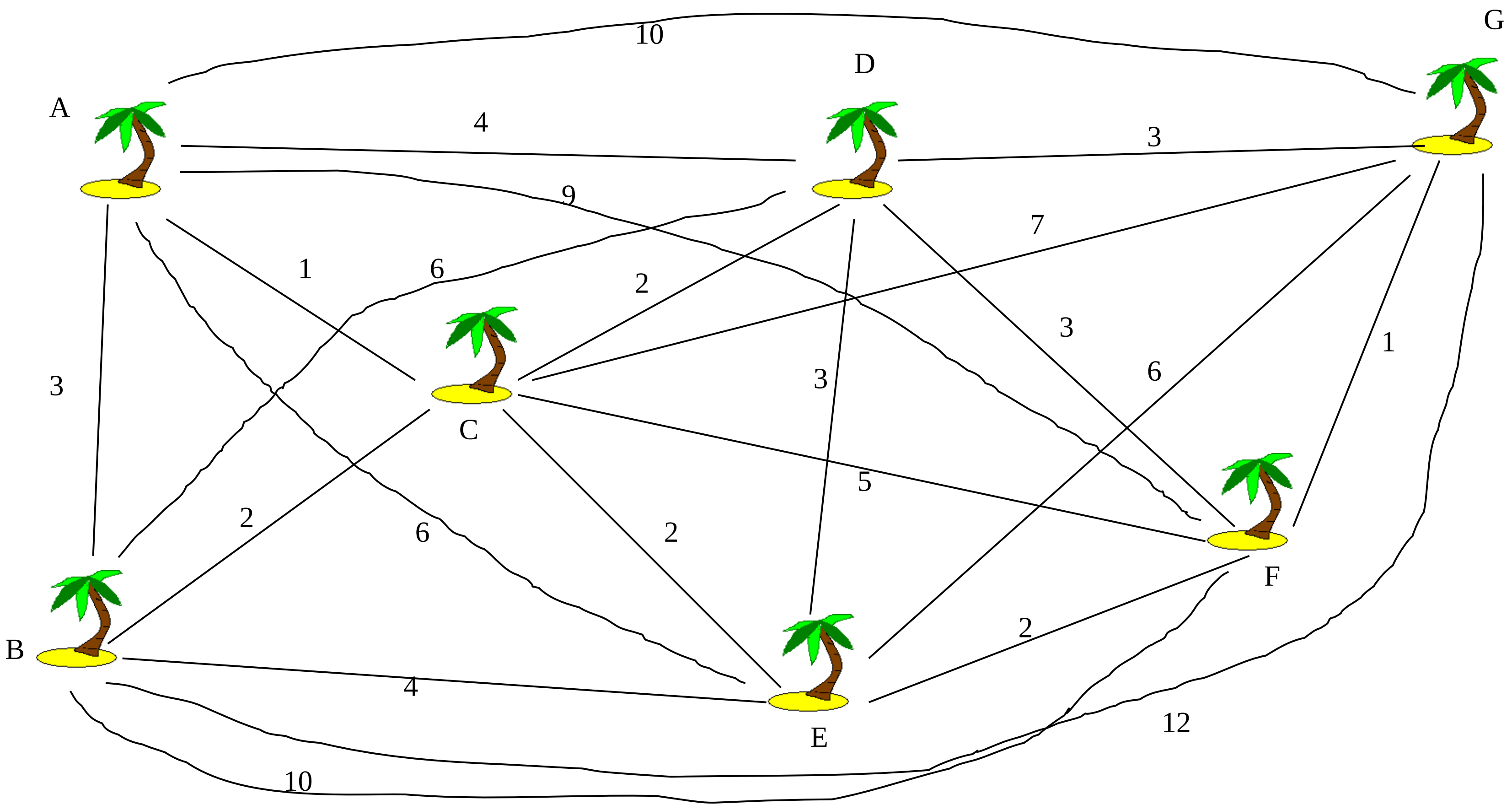
Ωκεανία



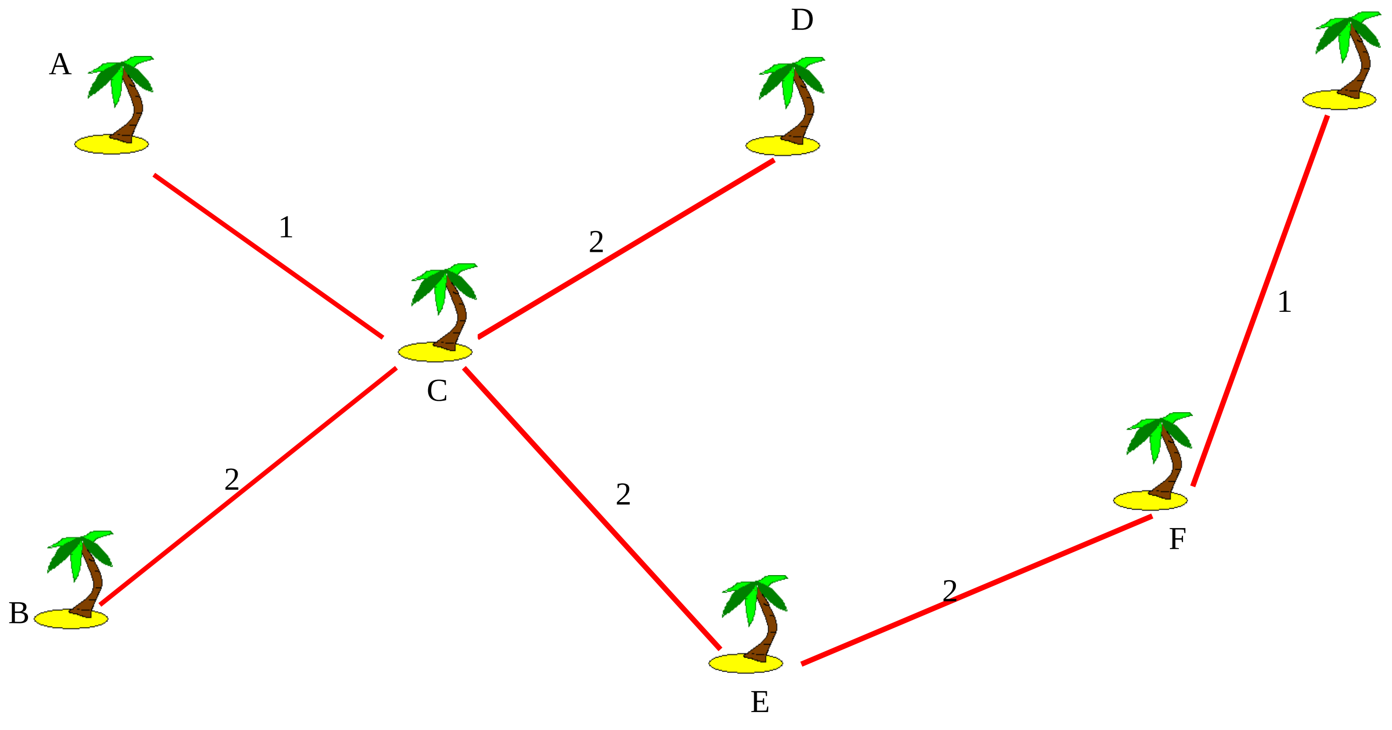


Ποιο δίκτυο διαδρομών είναι το ασφαλέστερο; (κίνδυνος από μεγάλες διαδρομές στη θάλασσα)

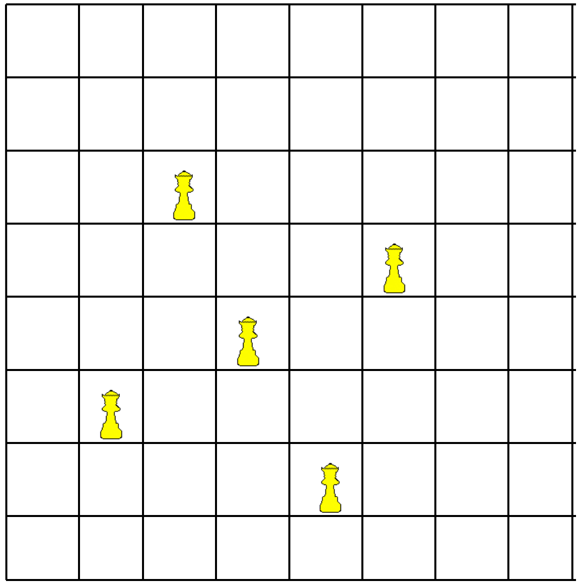
Δένδρα Ελάχιστης Σύνδεσης



Λύση

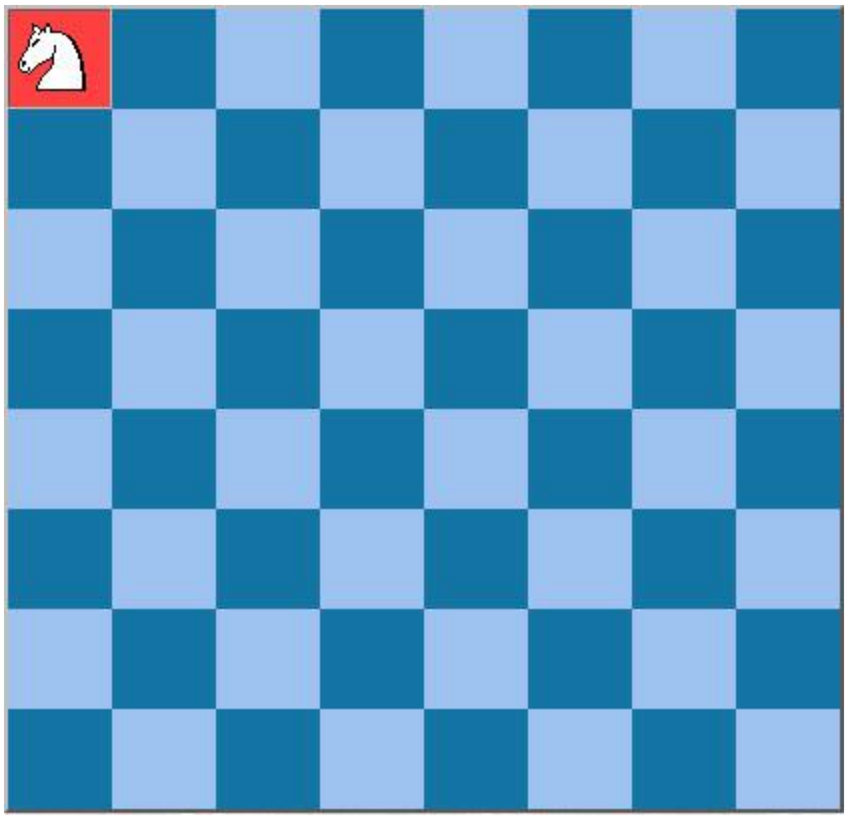


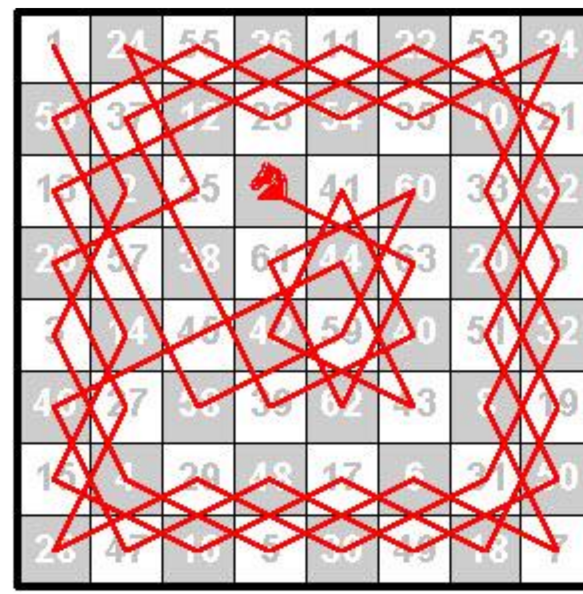
Σκάκι (πρόβλημα κυριαρχίας)



- Πως μπορώ να τοποθετήσω 8 βασίλισσες, χωρίς να απειλούνται;

Ο περίπατος του Ιππότη (Hamiltonian περίπατος)

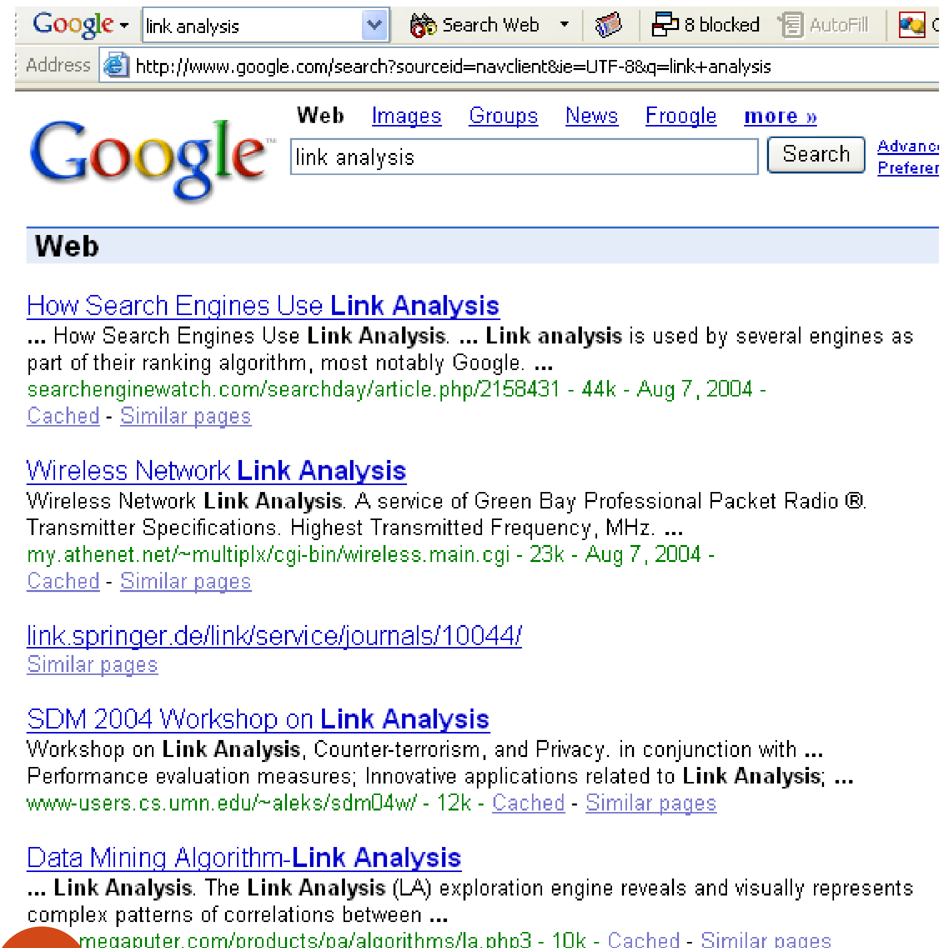


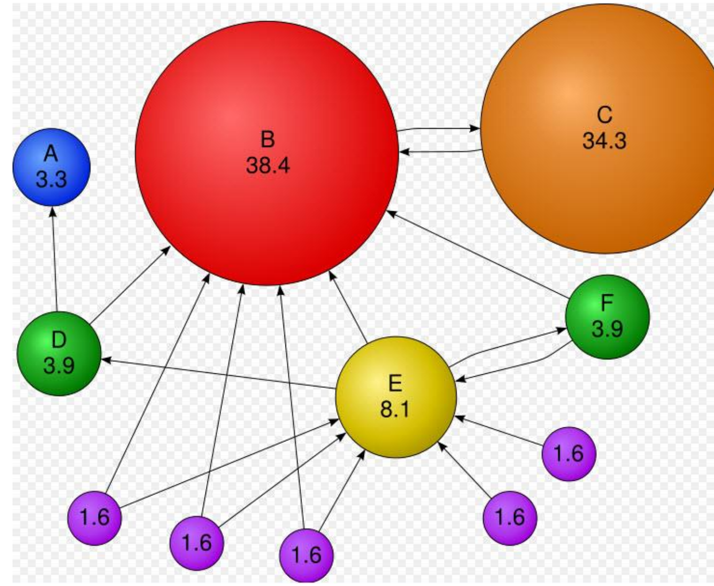


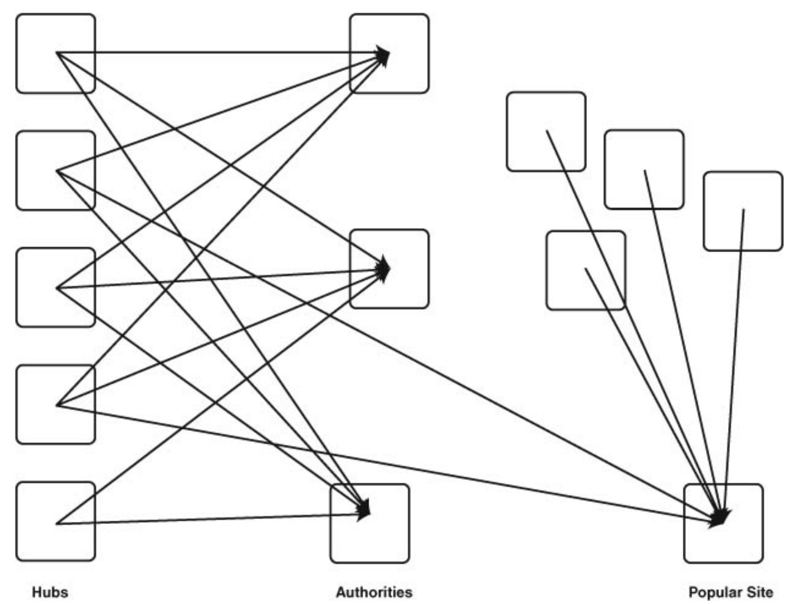
Χάρτες (χρωματισμός)

- Πως μπορώ να χρωματίσω κάθε χώρα (νομό) ώστε γειτονική νομοί να μην έχουν ίδιο χρώμα;
- Πόσα χρώματα χρειάζονται στο ελάχιστο;

Ανάλυση Συνδέσμων



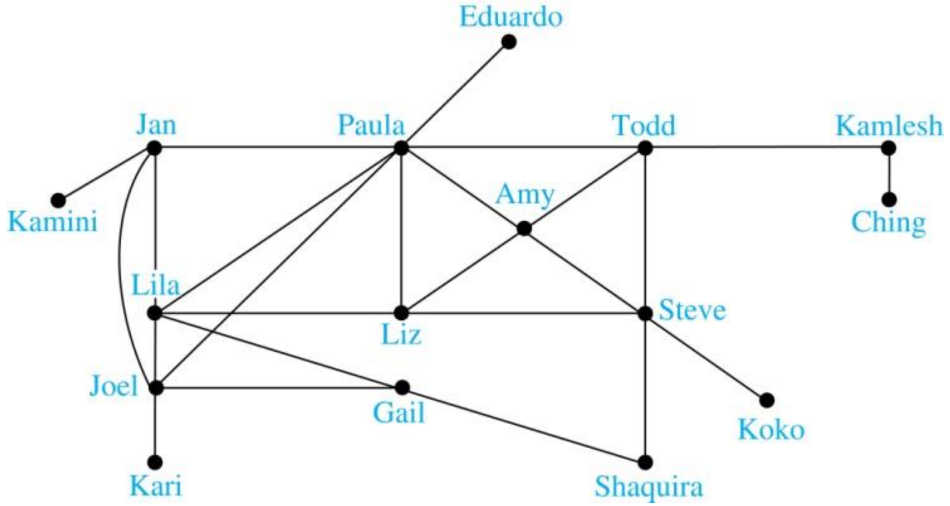




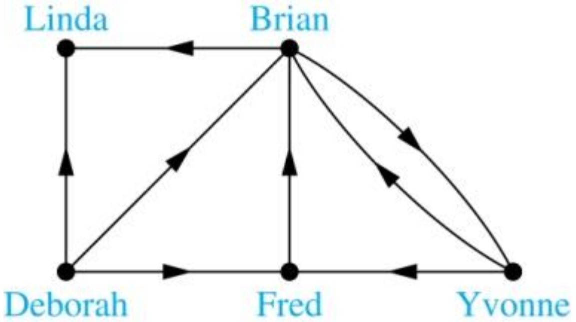
Ποιοι κόμβοι είναι *κεντρικοί*;

Κοινωνικά Δίκτυα

Ένα γράφημα φιλίας όπου δύο άνθρωποι συνδέονται αν είναι φίλοι στο Facebook.



Ένα γράφημα επιρροής



Τι είναι ένα γράφημα;

- Ένα σχήμα που αποτελείται από κόμβους και γραμμές που συνδέουν τους κόμβους
- Παραδείγματα γραφημάτων:
  - Οδικός χάρτης
  - Ηλεκτρικό κύκλωμα
  - Διάγραμμα ροής αλγόριθμου

Γεωμετρία που παίζει ρόλο μόνο η θέση και η σχέση των σημείων και όχι η απόσταση

- Παραλείπονται μορφολογικά χαρακτηριστικά
  - οι γραμμές μπορεί να είναι καμπύλες (δρόμοι)
  - οι κόμβοι μπορεί να είναι ορθογώνια (διαγράμματα ροής)
- Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα γράφημα μόνο από τους κόμβους και τις συνδετικές γραμμές

Ορισμός

Γράφημα (graph): Ένα ζεύγος $G=(V,E)$ συνόλων όπου

- Τα στοιχεία του συνόλου E είναι 2-υποσύνολα του συνόλου V
- Τα στοιχεία του V ονομάζονται ***κορυφές*** (vertices) του γραφήματος G
- Τα στοιχεία του E ονομάζονται ***ακμές*** (edges)

Για αναφορά στο γράφημα G, είναι χρήσιμοι οι συμβολισμοί $V(G)$ και $E(G)$

Παράδειγμα

$$\text{Γράφημα } G = (V, E)$$

Σύνολο κορυφών:

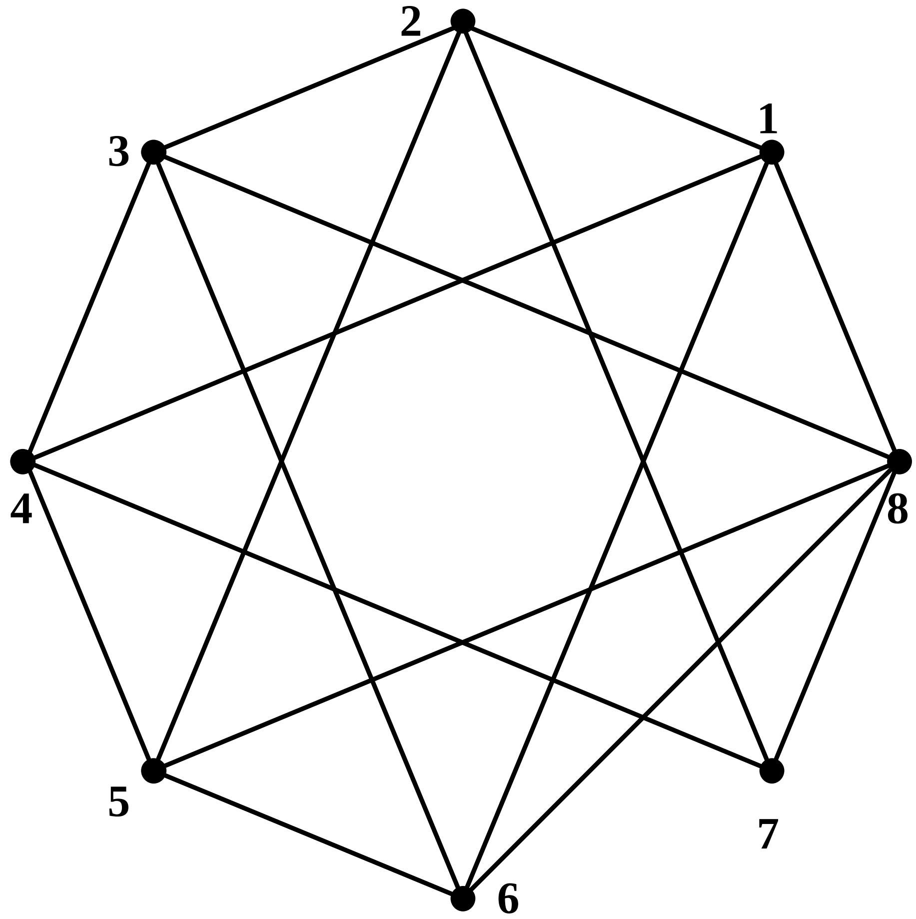
$$V = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

Σύνολο ακμών:

$$E = \{\,\{1,2\},\{1,4\},\{1,6\},\{1,8\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,6\},\{3,8\},$$
$$\{4,5\},\{4,7\},\{5,6\},\{5,8\},\{6,8\},\{7,8\}\,\}$$

Σχηματική παράσταση

Γράφημα με 8 κορυφές και 16 ακμές

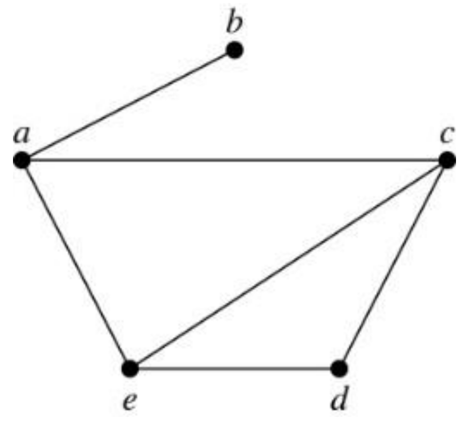


Ορολογία

- ***Τάξη*** (order) του γραφήματος G: το πλήθος των κορυφών του $|V(G)|$
- ***Μέγεθος*** (size) του γραφήματος G: το πλήθος των ακμών του $|E(G)|$
- Το σύνολο των κορυφών (και επομένως και των ακμών) είναι πεπερασμένο
- ***Γειτονικές*** (adjacent ή neighbours) κορυφές: $a,b \in E(G)$ και $e=\{a,b\} \in E(G)$
- Η ακμή e ***συνδέει*** (joins) τις κορυφές

Αναπαράσταση Γραφημάτων: Λίστες Γειτνίασης

Μία *λίστα γειτνίασης* μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ένα γράφημα χωρίς πολλαπλές ακμές καθορίζοντας τις κορυφές που είναι γειτονικές σε κάθε κορυφή του γραφήματος.



Κορυφή	Γειτονικές Κορυφές
a	b,c,e
b	a
c	a,d,e
d	c,e
e	a,c,d

Αναπαράσταση Γραφημάτων: Πίνακες Γειτνίασης

Παράσταση με αριθμητική μορφή, κατάλληλη για επεξεργασία με υπολογιστές

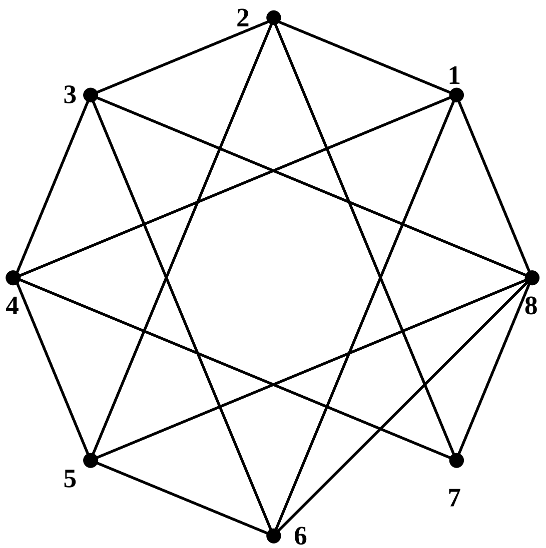
Πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix) γραφήματος $G=(V,E)$ με $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$:

Ο $n\times n$ πίνακας $\mathbf{A}_G=[a_{ij}^{(G)}]$ με στοιχεία

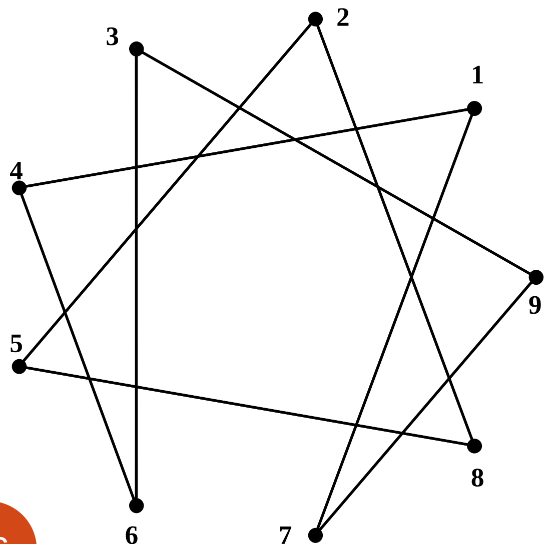
$$a_{ij}^{(G)}=\begin{cases}1 & \text{αν} \quad \{i,j\}\in E\\ 0 & \text{αν} \quad \{i,j\}\notin E\end{cases}, \qquad i,j\in 1,2,\ldots,n$$

$a_{ij}^{(G)}=1$ αν οι κορυφές v_i και v_j συνδέονται, 0 αλλιώς

Παράδειγμα



$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

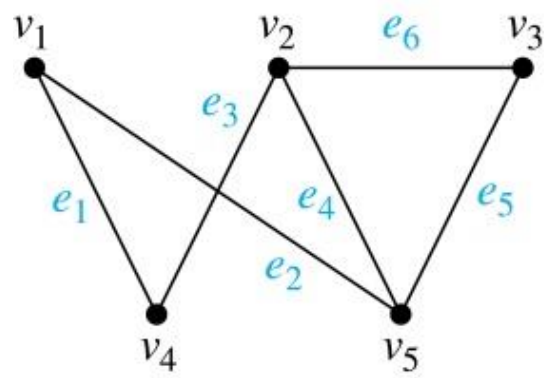
Αναπαράσταση Γραφημάτων: Πίνακες Πρόσπτωσης

Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα όπου $v_1, v_2, \dots v_n$ οι κορυφές και $e_1, e_2, \dots e_m$ οι ακμές. Ο πίνακας πρόσπτωσης σε σχέση με μία διάταξη των V και E είναι ένας $n \times m$ πίνακας $\mathbf{M} = [m_{ij}]$, όπου

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when edge } e_j \text{ is incident with } v_i, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{όταν η } e_j \text{ ειναι προσκειμενη στην } v_i \\ 0 & \text{διαφορετικα} \end{cases}$$

Παράδειγμα



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι γραμμές από πάνω προς τα κάτω αντιστοιχούν στις κορυφές v_1 έως v_5 και οι στήλες από αριστερά προς δεξιά *αντιστοιχούν στις ακμές* e_1 έως e_6.

Υπογράφημα

Ένα γράφημα $G' = (V', E')$ ονομάζεται ***υπογράφημα*** (subgraph) του $G = (V, E)$ (ή ισοδύναμα το G ονομάζεται **υπεργράφημα** (supergraph) του G') αν

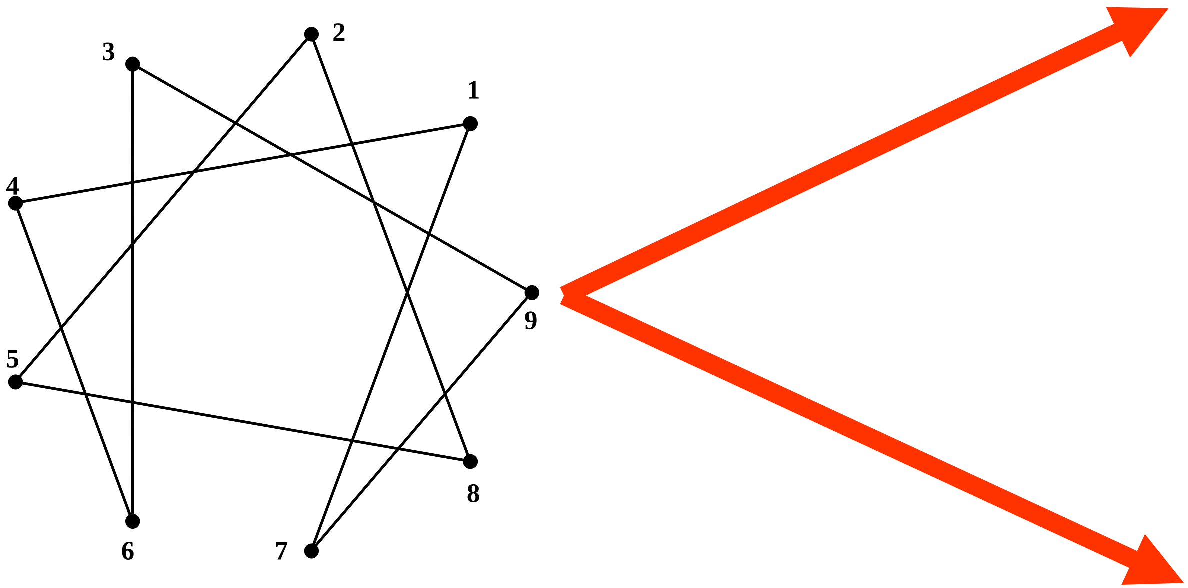
$$V' \subseteq V \quad \text{και} \quad E' \subseteq E.$$

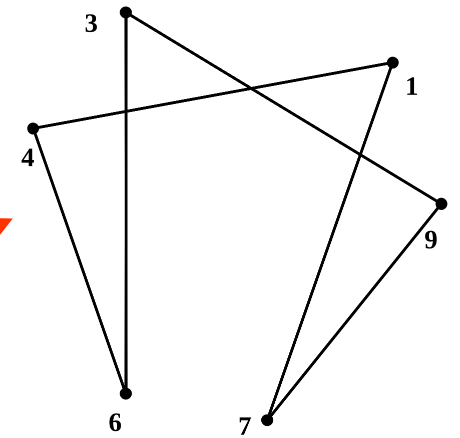
Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $G' \subseteq G$

Ειδικές περιπτώσεις

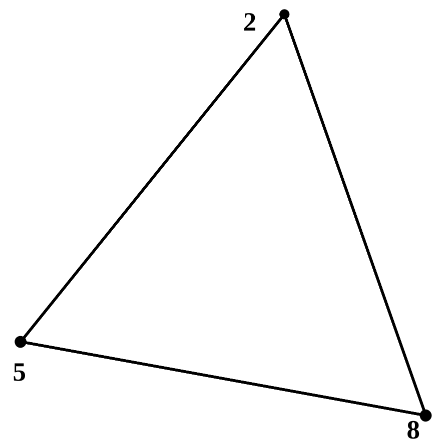
- ***Επιφέρον υπογράφημα*** (induced subgraph) G' του G: Αν $G' \subseteq G$ και το G' περιέχει όλες τις ακμές $\{a,b\} \in E$ που ενώνουν τις κορυφές $a,b \in V'$. Συμβολίζεται $\langle V' \rangle$
- *<u>Ερμηνεία:</u>* το επιφέρον υπογράφημα είναι το μεγαλύτερο σε μέγεθος (αριθμό ακμών) υπογράφημα του G με το συγκεκριμένο σύνολο κορυφών V'.
- *<u>Λέμε:</u>* το σύνολο V' ***επιφέρει*** ή ***παράγει*** (induces or spans) το γράφημα G'
- Αν $G' \subseteq G$ και $V' = V$, το G' ονομάζεται ***παράγον υπογράφημα*** (spanning subgraph) του G

Παράδειγμα





$V' = \{1,3,4,6,7,9\}$



$V'' = \{2,5,8\}$

$$V(G) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$E(G) = \{\,\{1,4\},\{1,7\},\{2,5\},\{2,8\},$$
$$\{3,6\},\{3,9\},\{4,6\},\{5,8\},\{7,9\}\,\}$$

Παράδειγμα (συν.)

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\langle V' \rangle} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\langle V'' \rangle} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πράξεις γραφημάτων

Γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$:

Ένωση (union) γραφημάτων: $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$

Τομή (intersection) γραφημάτων: $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$

Γενίκευση για περισσότερα: $\mathrm{G}_i = (\mathrm{V}_i, \mathrm{E}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{V}_i, \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i\right)$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{V}_i, \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i\right)$$

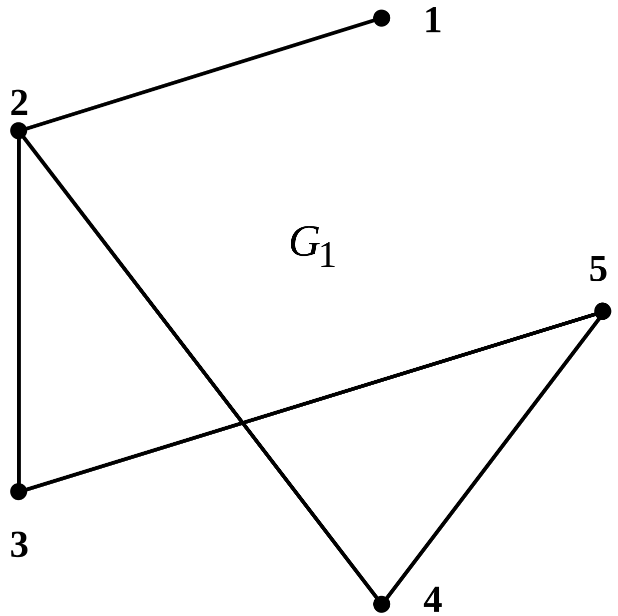
Αν $\mathrm{V}_\mathrm{i} \cap \mathrm{V}_j = \varnothing$, τότε γράφουμε $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{G}_i$ (***ευθύ άθροισμα***)

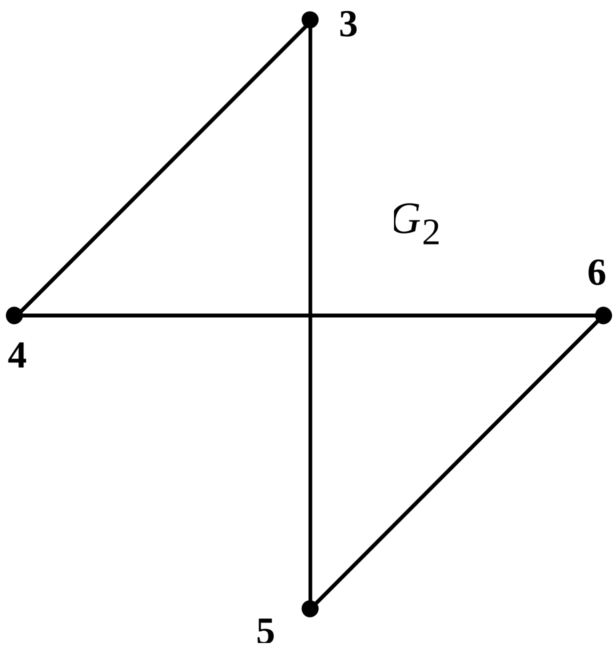
Παράδειγμα

Γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$:

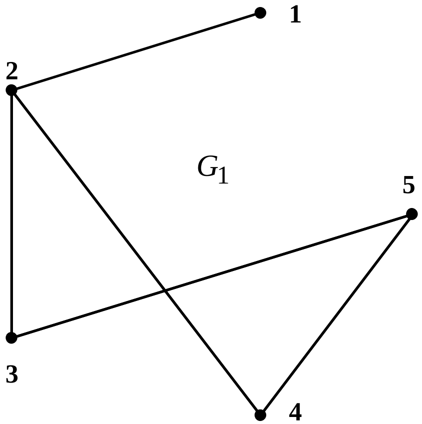
$$V_1 = \{1,2,3,4,5\}, \quad E_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{4,5\}\}$$

$$V_2 = \{3,4,5,6\} \quad E_2 = \{\{3,4\},\{3,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$$



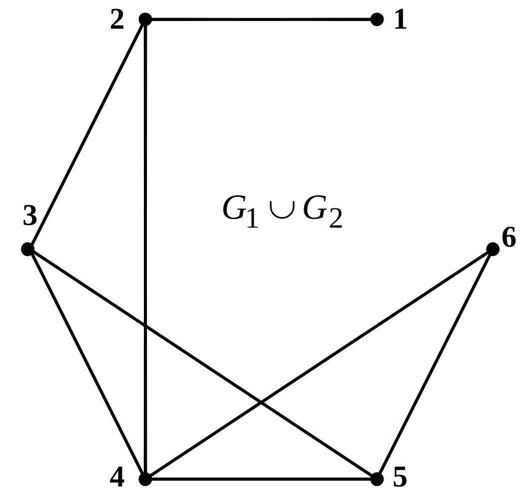


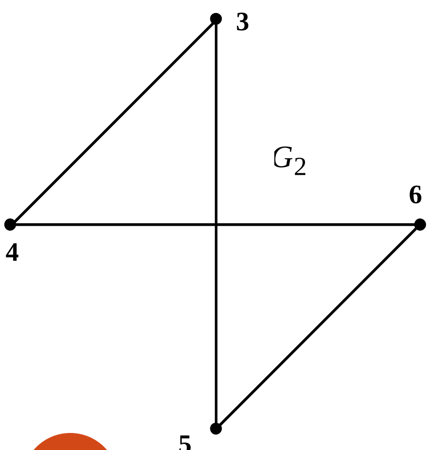
Παράδειγμα (συν.)



$$V(G_1 \cup G_2) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

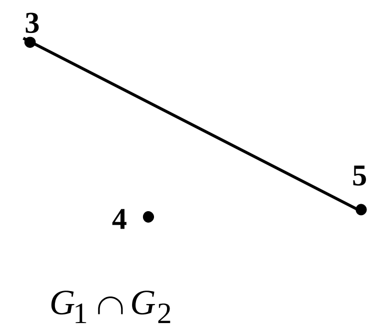
$$E(G_1 \cup G_2) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\},$$
$$\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$$





$$V(G_1 \cap G_2) = \{3,4,5\}$$

$$E(G_1 \cap G_2) = \{\{3,5\}\}$$



Παράδειγμα (ευθύ άθροισμα)

Γραφήματα $G_1 = (V_1, E_1)$ και $G_2 = (V_2, E_2)$:

$$V_1 = \{1,3,5,7\}, \qquad E_1 = \{\{1,3\},\{1,5\},\{3,5\},\{3,7\},\{5,7\}\}$$

$$V_2 = \{2,4,6,8\} \qquad E_2 = \{\{2,4\},\{2,8\},\{4,6\},\{6,8\}\}$$

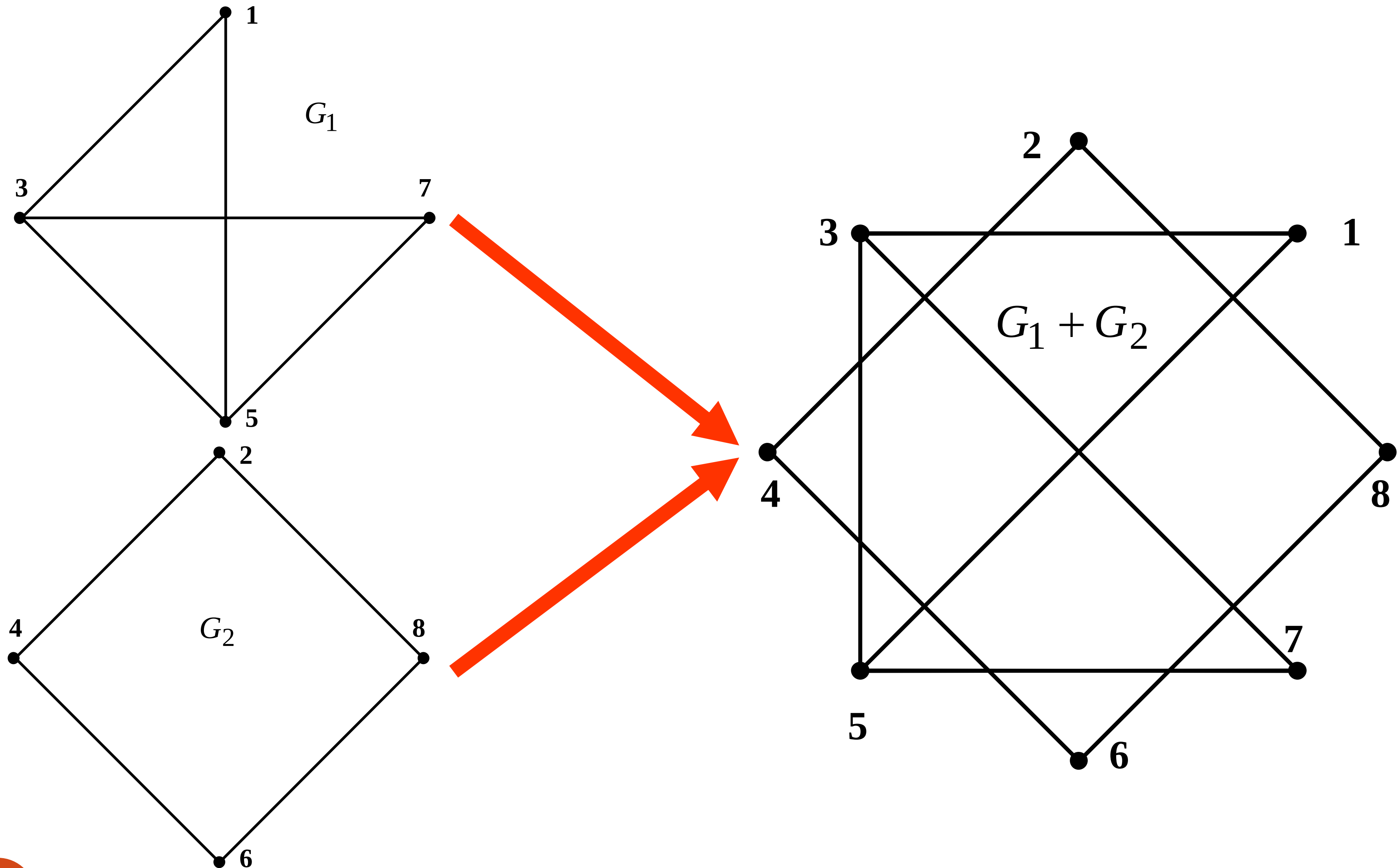
$V_1 \cap V_2 = \varnothing$, οπότε $G_1 \cup G_2 = G_1 + G_2$:

$$V(G_1 + G_2) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

και

$$E(G_1 + G_2) = \{\{1,3\},\{1,5\},\{2,4\},\{2,8\},\{3,5\},\{3,7\},$$
$$\{4,6\},\{5,7\},\{6,8\}\}.$$

Παράδειγμα (ευθύ άθροισμα)



Συμπληρωματικό γράφημα

Συμπληρωματικό (complement) του γραφήματος $G = (V, E)$:

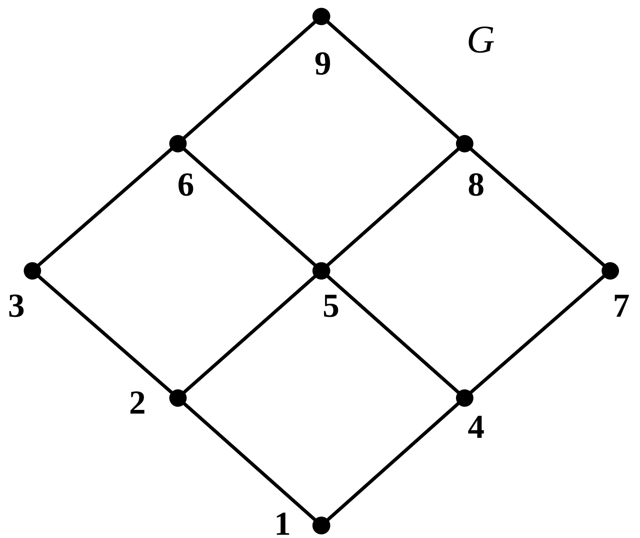
Το γράφημα $\overline{G}$ για το οποίο:

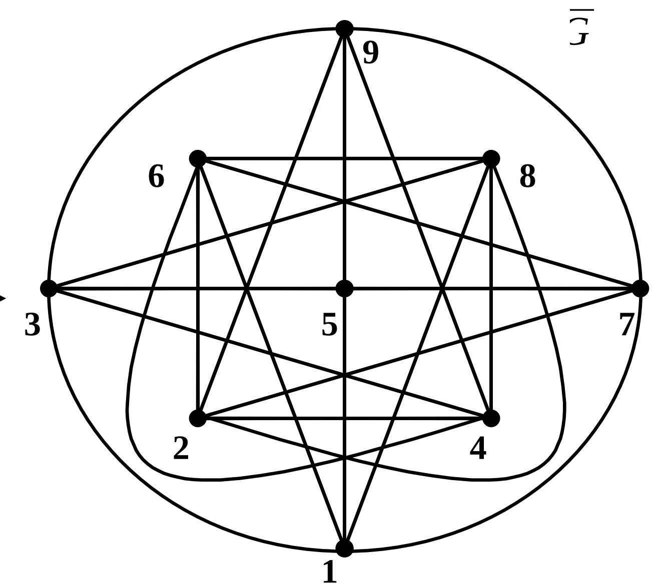
- $V(\overline{G}) = V$
- Το σύνολο των ακμών του $\overline{G}$ αποτελείται από όλα τα 2-υποσύνολα του V τα οποία όμως δεν είναι στοιχεία του E

Σημαντική ιδιότητα του πίνακα γειτνίασης:

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij}^{(G)} = 1 \Leftrightarrow a_{ij}^{(\overline{G})} = 0 \\ a_{ij}^{(G)} = 0 \Leftrightarrow a_{ij}^{(\overline{G})} = 1 \end{array}\right. \quad \text{για } \; i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$$

Παράδειγμα





$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{\overline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαγραφή και πρόσθεση κορυφής

Σε γράφημα $G=(V,E)$:

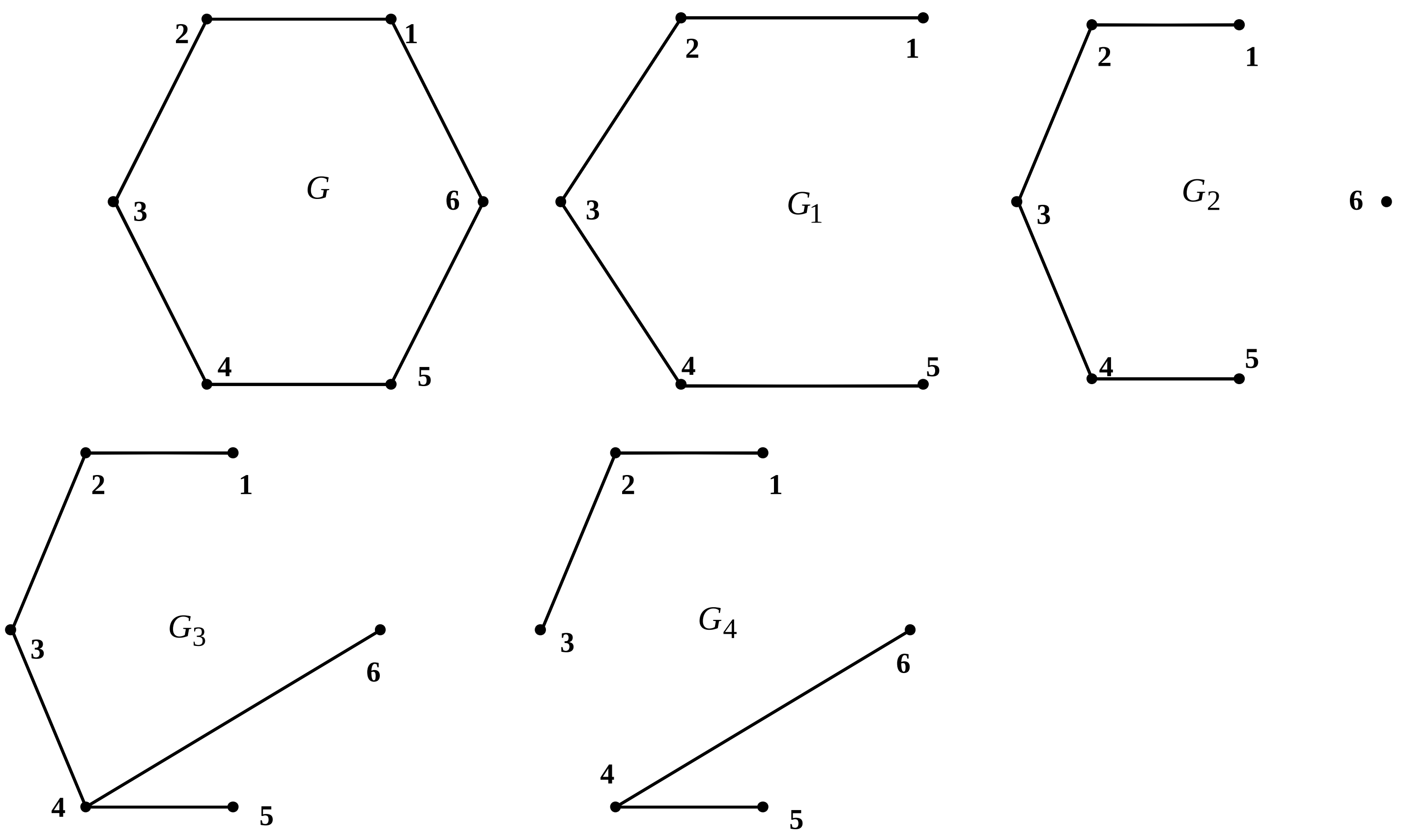
- ***Διαγραφή κορυφής*** $v \in V$ (deleting a vertex) $G-v$: το <u>υπογράφημα</u> που ορίζεται από όλες τις υπόλοιπες κορυφές και όλες τις ακμές που δεν είχαν ως άκρο την κορυφή v.
- ***Πρόσθεση κορυφής*** (adding a vertex) $w \notin V$ $G+w$: <u>υπεργράφημα</u> του G όπου η νέα κορυφή δε θα είναι συνδεδεμένη με καμία άλλη

Διαγραφή και πρόσθεση ακμής

- ***Διαγραφή ακμής*** $e \in E$ $G-e$: δημιουργεί ένα <u>υπογράφημα</u> με όλες τις κορυφές του G και με όλες τις ακμές του, εκτός από την e.
- ***Πρόσθεση ακμής*** $e=\{u,v\}$ $G+e$: Αν δύο κορυφές $v,u \in V$ δε συνδέονται με κάποια ακμή στο G, τότε δημιουργείται ένα <u>υπεργράφημα</u> του G το οποίο περιέχει όλες τις κορυφές και τις ακμές του G μαζί με τη νέα ακμή.

Παράδειγμα

$$G_1 = G - 6, \quad G_2 = G_1 + 6, \quad G_3 = G_2 + \{4,6\}, \quad G_4 = G_3 - \{3,4\}$$



Πλήρες γράφημα

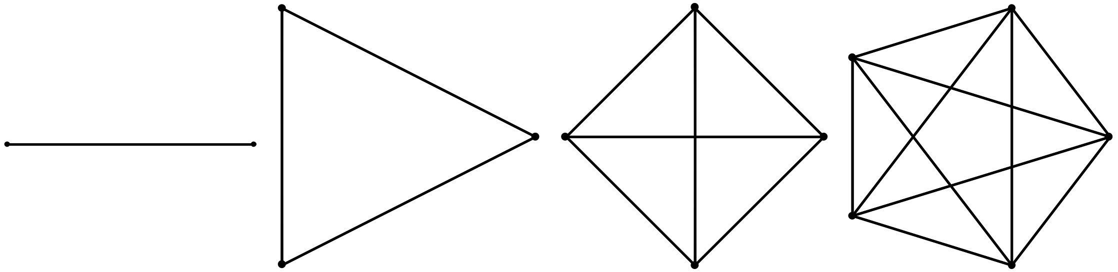
Πλήρες γράφημα (complete graph): Γράφημα G του οποίου όλες οι κορυφές είναι ανά δύο γειτονικές. Αν δηλαδή $G=(V,E)$ τότε ισχύει:

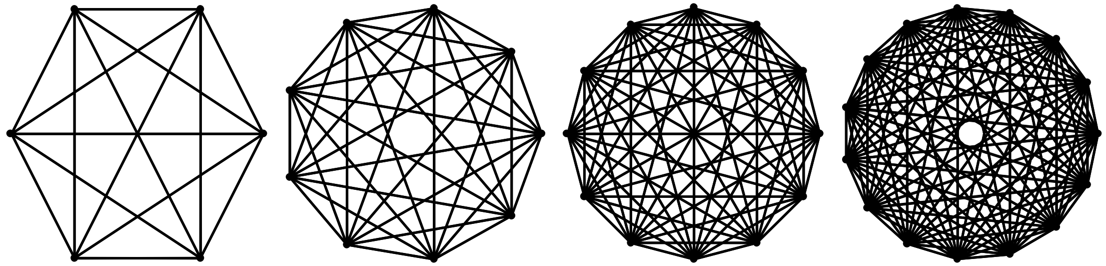
$$\text{Για κάθε } u,v \in V \Rightarrow \{u,v\} \in E$$

- Το πλήρες γράφημα με $|V| = n$ κορυφές συμβολίζεται με K_n
- Ο πίνακας γειτνίασης ενός πλήρους γραφήματος έχει όλα τα μη-διαγώνια στοιχεία ίσα με 1

Παράδειγμα

Όλα τα πλήρη γραφήματα K_n για n = 2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 24.





Αριθμός ακμών K_n

Αριθμός ακμών του K_n:

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

<u>Απόδειξη:</u>

•Οι ακμές ενός γραφήματος είναι όσες και τα «1» πάνω (ή κάτω) από τη διαγώνιο του πίνακα γειτνίασης

•Στο πλήρες γράφημα όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι ίσα με 1.

•Πλήθος: $(n^2-n)/2=n(n-1)/2$

Συνδυαστική Απόδειξη;

Διμερές γράφημα

Διμερές γράφημα ή ***διγράφημα*** $G=(V,E)$ αν:

- Υπάρχει διαμέριση των κορυφών του σε δύο κλάσεις V_1 και V_2 (δηλ. $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ και $V_1 \cup V_2 = V$) ώστε κάθε ακμή του γραφήματος να έχει τα άκρα της σε διαφορετικές κλάσεις.

Δύο κορυφές που ανήκουν στην ίδια κλάση δεν μπορεί να είναι γειτονικές.

Πλήρες διμερές γράφημα

Στην περίπτωση που κάθε κορυφή της κλάσης V_1 συνδέεται με όλες τις κορυφές της V_2, το γράφημα ονομάζεται πλήρες διμερές γράφημα και συμβολίζεται με $K_{n1,n2}$ όπου $n_1=|V_1|$ και $n_2=|V_2|$

Πίνακας γειτνίασης διμερούς γραφήματος

Πίνακας γειτνίασης διμερούς γραφήματος:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0}_{n_2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}_{n_i}$: $n_i \times n_i$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του 0

$\mathbf{B}_{12}$: $n_1 \times n_2$ πίνακας που παριστά τη γειτνίαση των στοιχείων των δύο κλάσεων.

Γενίκευση ορισμού

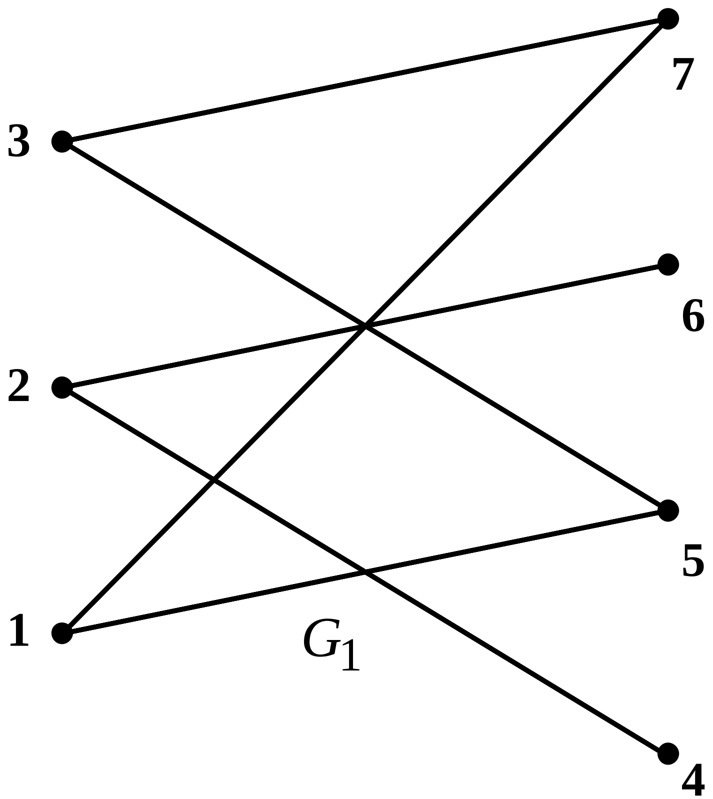
- Για διαμέριση του V σε $r>2$ κλάσεις $V_1, V_2, \ldots, V_r$: $r-$***μερές γράφημα.***
- Αν κάθε κορυφή της κλάσης V_i, $i=1,2,\ldots,r$ συνδέεται με όλες τις κορυφές όλων των άλλων κλάσεων, τότε το γράφημα ονομάζεται ***πλήρες*** $r-$***μερές γράφημα*** $K_{n_1,\ldots,n_r}$ όπου $n_i = |V_i|$, $i=1,2,\ldots,r$.
- Πίνακας γειτνίασης:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_1} & \mathbf{B}_{12} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \mathbf{B}'_{12} & \mathbf{0}_{n_2} & \cdots & \mathbf{B}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{1r} & \mathbf{B}_{2r} & \cdots & \mathbf{0}_{n_r} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

- Διμερές γράφημα

$$V(G_1) = \{1,2,3\} \cup \{4,5,6,7\}$$

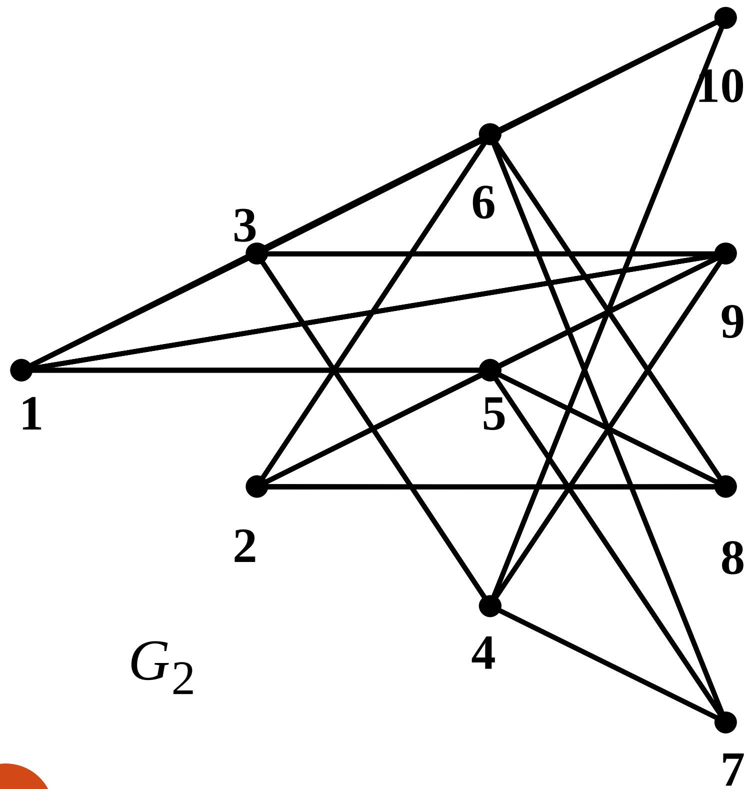


$$\mathbf{A}_{G_1} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Παράδειγμα

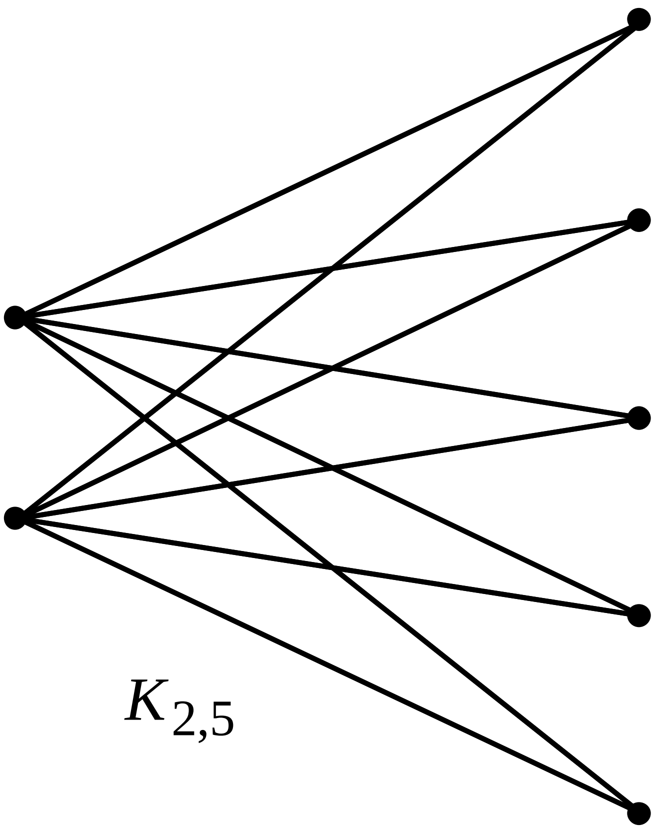
- 4-μερές γράφημα

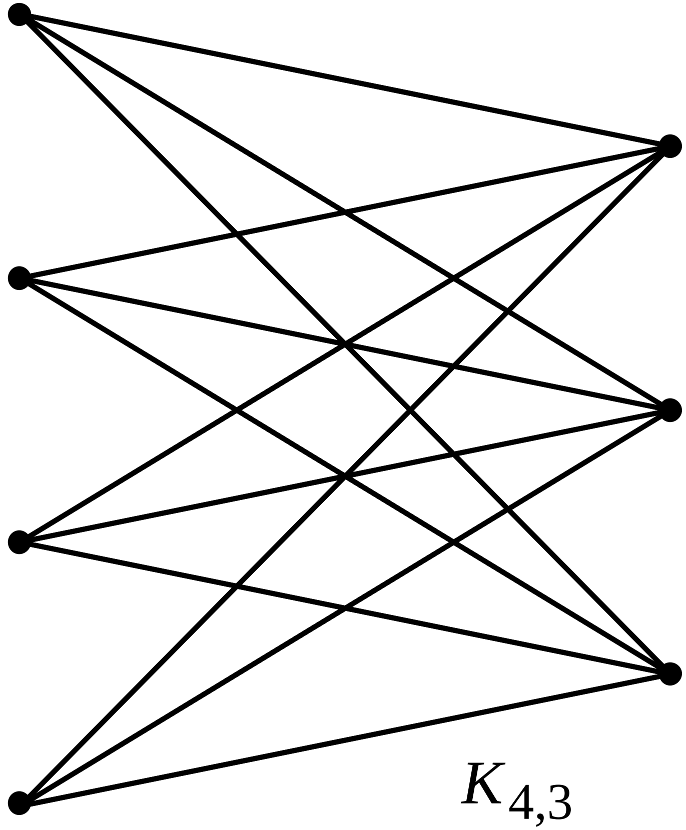
$$V(G_2) = \{1\} \cup \{2,3\} \cup \{4,5,6\} \cup \{7,8,9,10\}$$



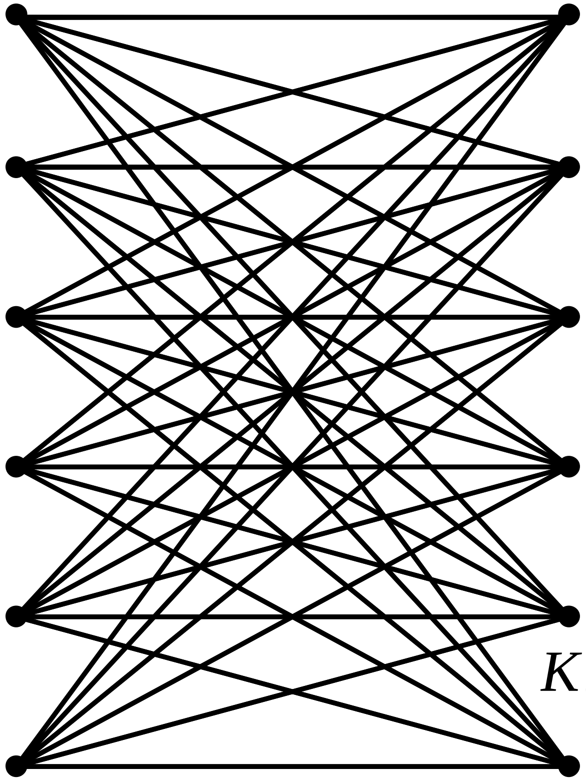
$$\mathbf{A}_{G_2} = \left[\begin{array}{c|cc|ccc|cccc}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Πλήρη διμερή γραφήματα

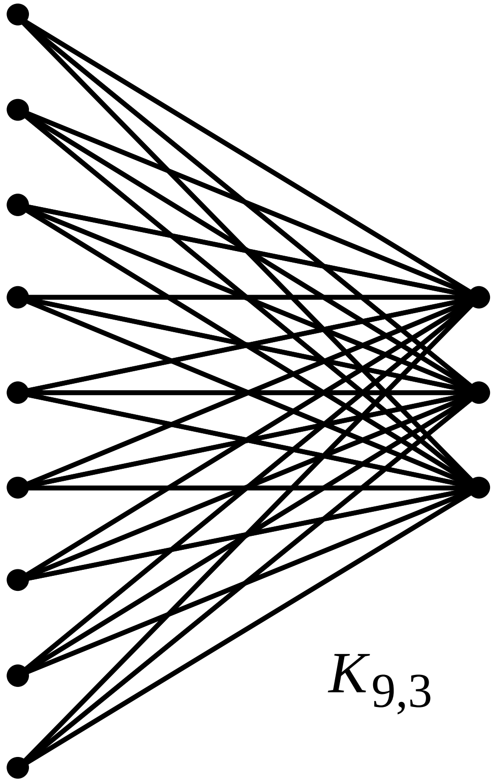




Πλήρη διμερή γραφήματα

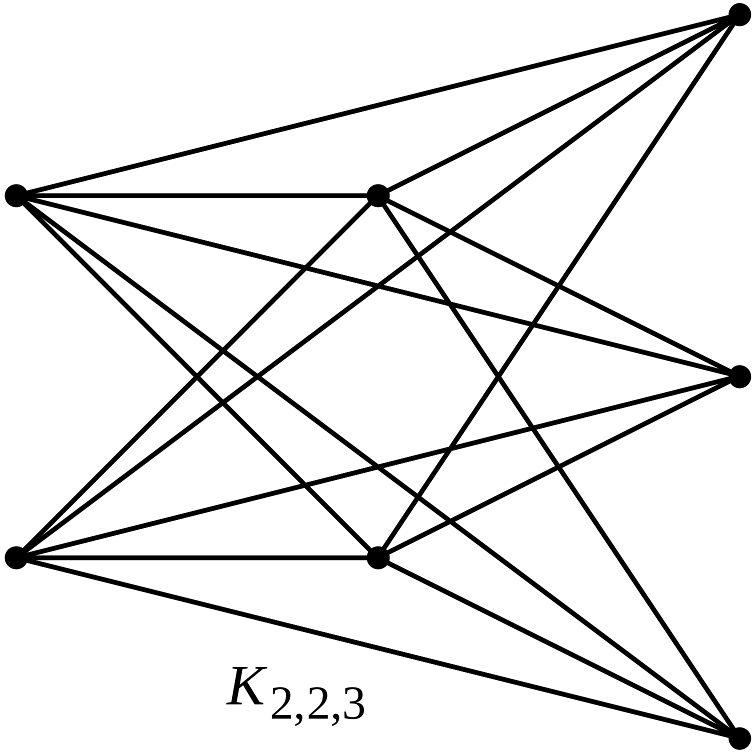


$K_{6,6}$

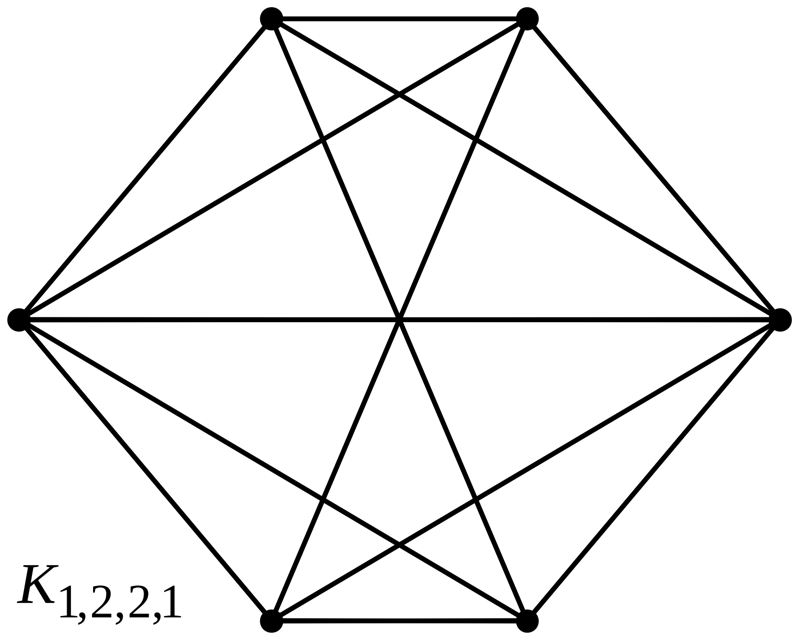


$K_{9,3}$

Πλήρη *r*-μερή γραφήματα



$K_{2,2,3}$



$K_{1,2,2,1}$

Βαθμός κορυφής

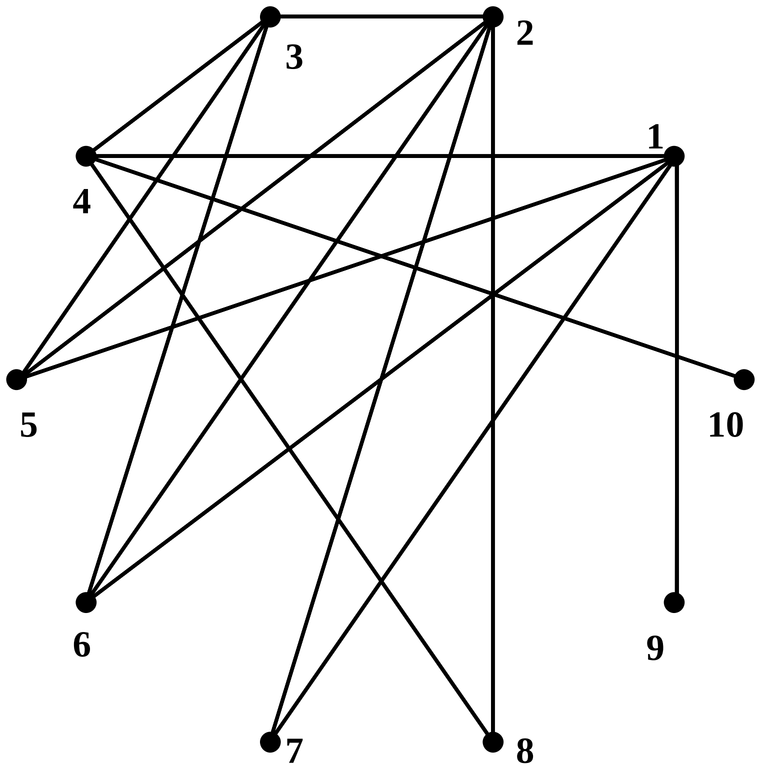
- Ο ***βαθμός*** (degree ή valency) της κορυφής v στο γράφημα G, είναι ο αριθμός των ακμών του γραφήματος που έχουν σαν άκρο την κορυφή v και συμβολίζεται με $d_G(v)$ ή πιο απλά με $d(v)$.
- Μια κορυφή με βαθμό 0 ονομάζεται ***απομονωμένη*** (isolated).

Παράδειγμα

$$d(1) = d(2) = 5,\ d(3) = d(4) = 4,$$

$$d(5) = d(6) = 3,\ d(7) = d(8) = 2,$$

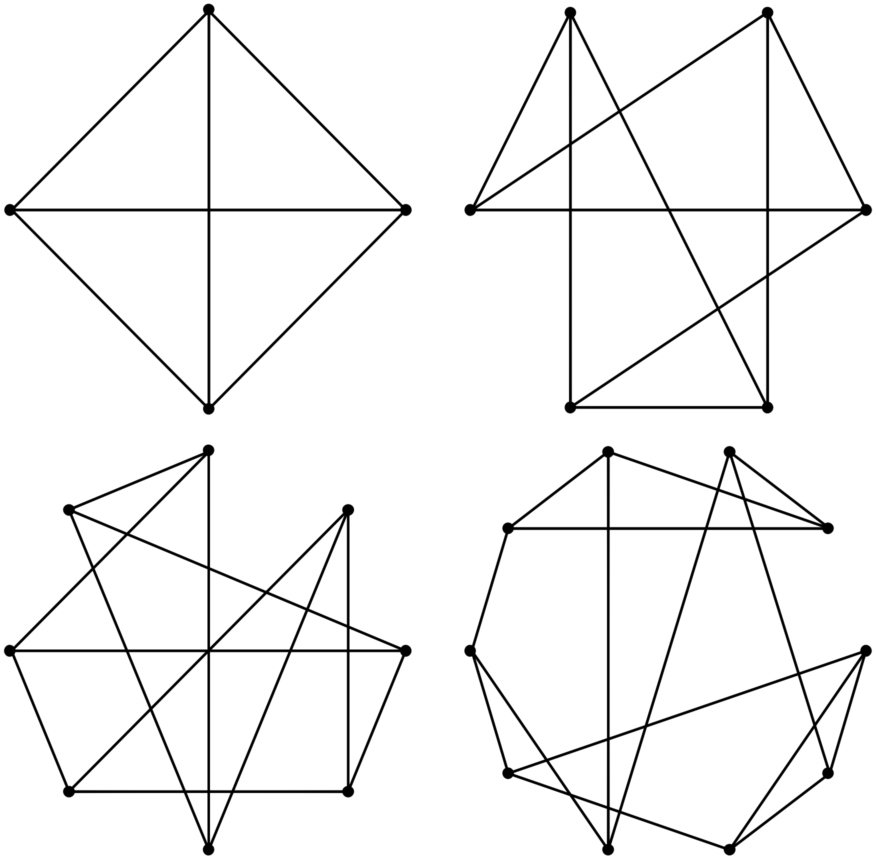
$$d(9) = d(10) = 1$$



Κανονικό γράφημα

- Αν όλες οι κορυφές ενός γραφήματος έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε το γράφημα ονομάζεται ***κανονικό*** (regular).
- Ένα κανονικό γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή έχει τον ίδιο βαθμό k, ονομάζεται και k −***κανονικό*** (k −regular).
- Τα 3-κανονικά γραφήματα ονομάζονται και ***κυβικά*** (cubic).

Παράδειγμα



Κυβικά γραφήματα με 4,6,8,10 κορυφές

Άθροισμα βαθμών

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Απόδειξη: Το άθροισμα των βαθμών των κορυφών είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα γειτνίασης και είναι το διπλάσιο από το πλήθος των ακμών το οποίο εκφράζεται από το άθροισμα των στοιχείων πάνω (ή κάτω) από τη διαγώνιο.

Βαθμοί Κορυφών

- Πόσες ακμές έχει ένα γράφημα με 10 κορυφές βαθμού 6;

- Αν ένα γράφημα έχει 5 κορυφές, μπορεί κάθε κορυφή να έχει βαθμό;

- Να δείξετε ότι ένα γράφημα έχει άρτιο πλήθος κορυφών περιττού βαθμού.

Διαδρομή

Σε ένα γράφημα $G=(V,E)$, ως ***διαδρομή*** (path) μεταξύ δύο κορυφών v_0 και v_k ορίζεται ένα υπογράφημα της μορφής $P=(V_p,E_p)$ όπου

$$V_p=\{v_0,v_1,\ldots,v_{k-1},v_k\}$$

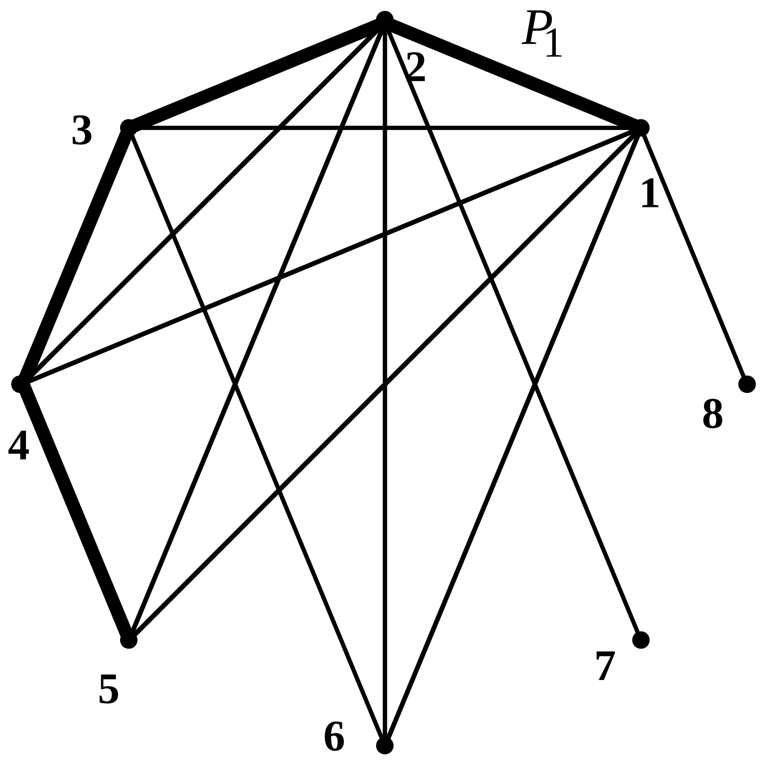
και

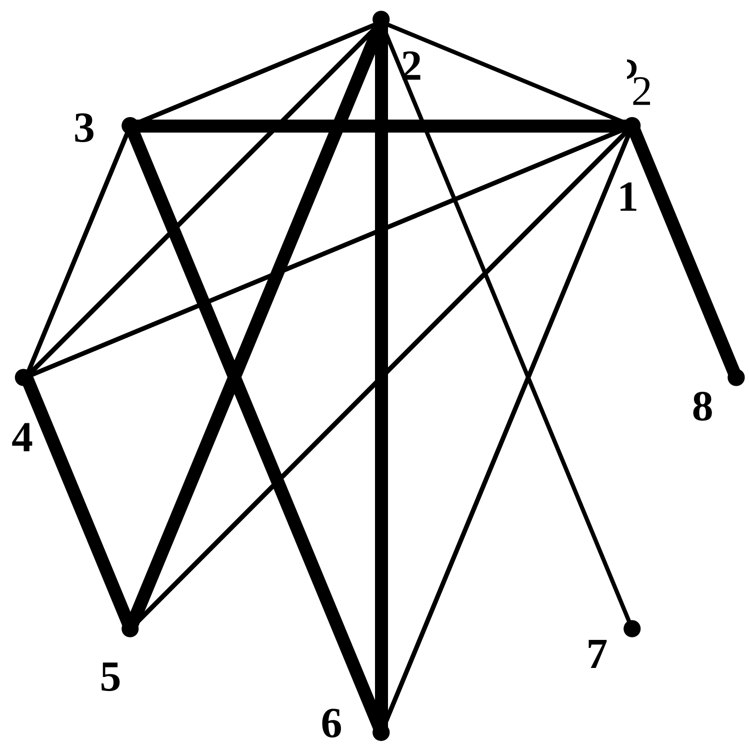
$$E_p=\{\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\ldots,\{v_{k-1},v_k\}\}.$$

Διαδρομή

- Η διαδρομή είναι ακολουθία διαδοχικά γειτονικών κορυφών, χωρίς επανάληψη ακμών
- Λέμε ότι οι κορυφές v_0 και v_k ***επικοινωνούν*** (are linked) μέσω της P και ότι αποτελούν τα ***άκρα*** (edges) της
- Οι κορυφές $v_1,\ldots,v_{k-1}$ ονομάζονται ***εσωτερικές*** (inner) κορυφές της διαδρομής
- Το πλήθος των ακμών $\left|E_p\right|$ ονομάζεται ***μήκος*** (length) της διαδρομής.
- Συνήθως η διαδρομή συμβολίζεται με την ακολουθία των κορυφών της, γράφουμε δηλαδή $P = v_0 v_1 \ldots v_k$

Παράδειγμα





$$P_1 = 1,2,3,4,5$$

$$P_2 = 8,1,3,6,2,5,4$$

Κύκλος

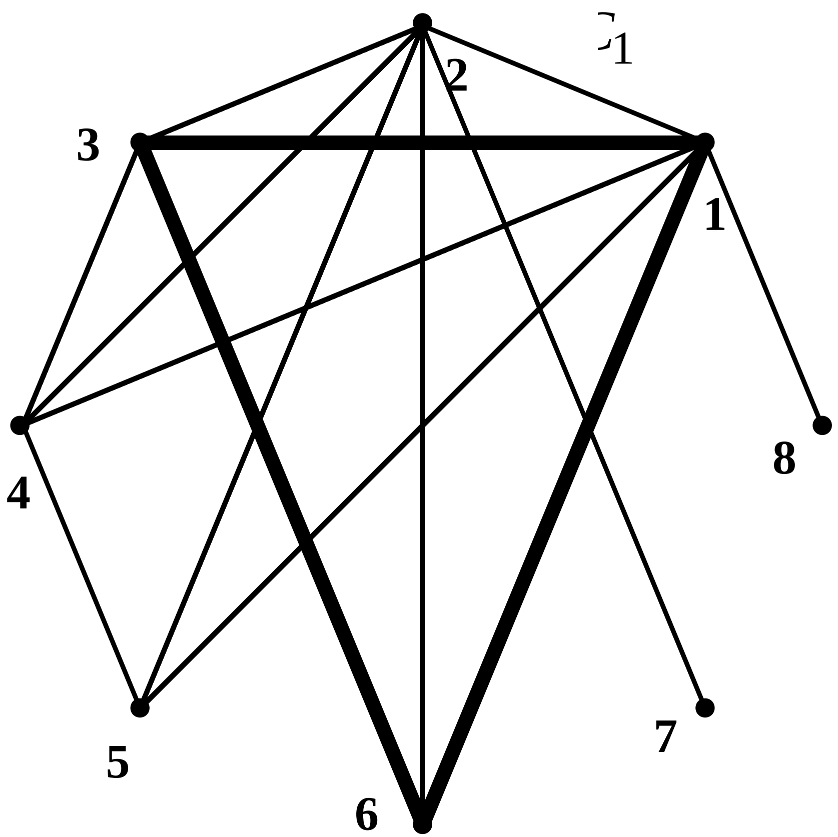
- Αν $P = v_0 v_1 \ldots v_{k-1}$ είναι μία διαδρομή, τότε το γράφημα

$$C = (V(P), E(P) \cup \{v_{k-1}, v_0\})$$

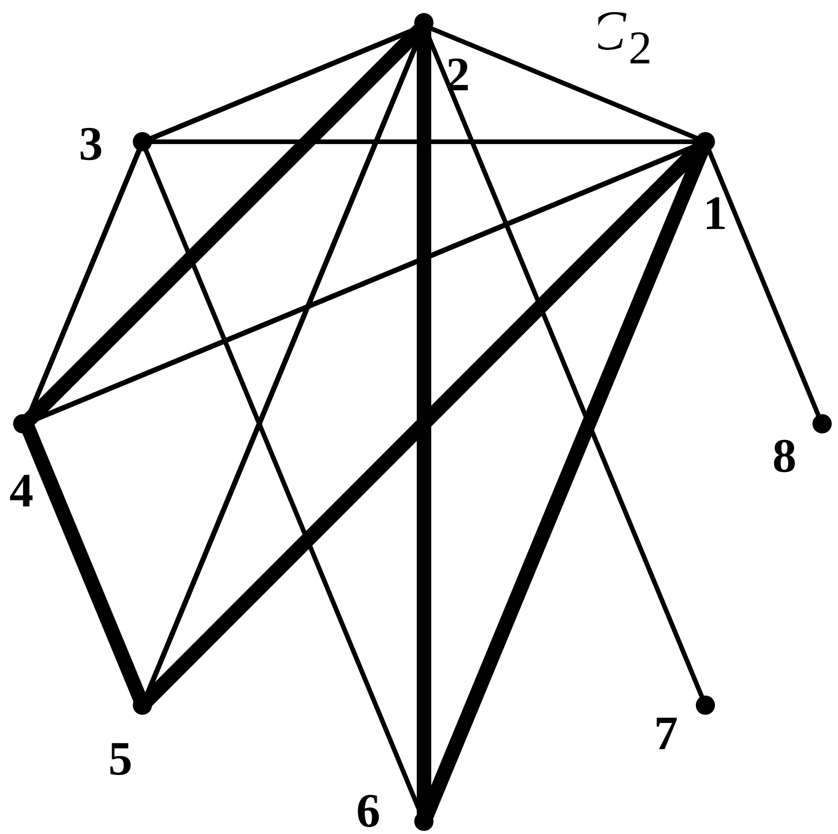
που προκύπτει από την προσθήκη μιας ακμής που ενώνει το τέλος της διαδρομής με την αρχή της, ονομάζεται ***κύκλος*** (cycle).

- Ο κύκλος συμβολίζεται με την ακολουθία των κορυφών του: $C = v_0 v_1 \ldots v_{k-1}\, v_0$

Παραδείγματα κύκλων



$$C_1 = 1,3,6,1$$

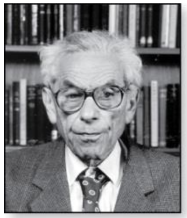


$$C_2 = 5,1,6,2,4,5$$

Συνδεδεμένο γράφημα

- ***Συνδεδεμένο*** (connected) γράφημα G: Αν οποιεσδήποτε δύο διαφορετικές κορυφές του, επικοινωνούν μέσω μίας τουλάχιστον διαδρομής.
- Στην περίπτωση που υπάρχει τουλάχιστον ένα ζευγάρι κορυφών οι οποίες δεν επικοινωνούν, το γράφημα ονομάζεται ***μη-συνδεδεμένο*** (disconnected).

Erdős numbers



Paul Erdős

Example: *Erdős numbers*.
In a collaboration graph, two people *a* and *b* are connected by a path when there is a sequence of people starting with *a* and ending with *b* such that the endpoints of each edge in the path are people who have collaborated.

- In the academic collaboration graph of people who have written papers in mathematics, the *Erdős number* of a person *m* is the length of the shortest path between *m* and the prolific mathematician Paul Erdős.
- To learn more about Erdős numbers, visit

http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html

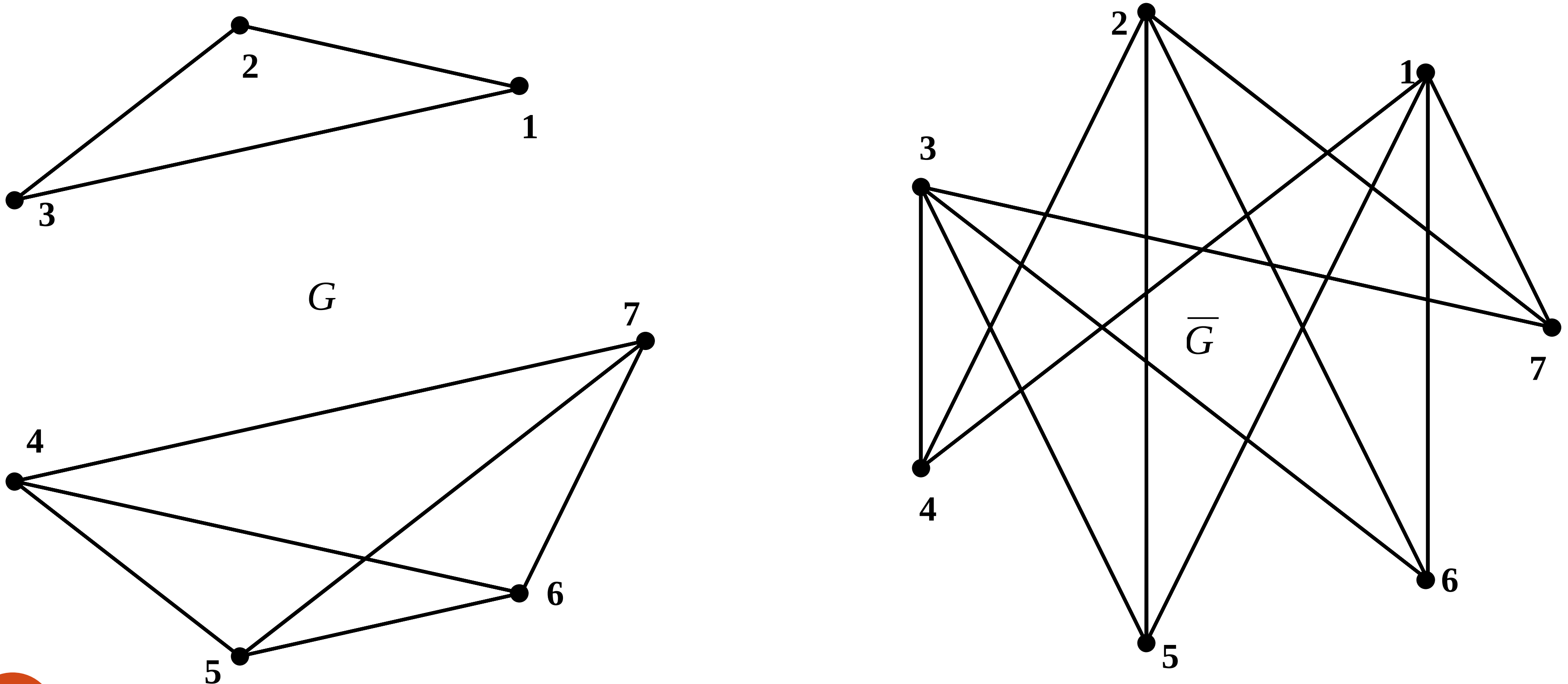
TABLE 1 The Number of Mathematicians with a Given Erdős Number (as of early 2006).

Erdős Number	*Number of People*
0	1
1	504
2	6,593
3	33,605
4	83,642
5	87,760
6	40,014
7	11,591
8	3,146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5

Παράδειγμα

Απόδειξη….

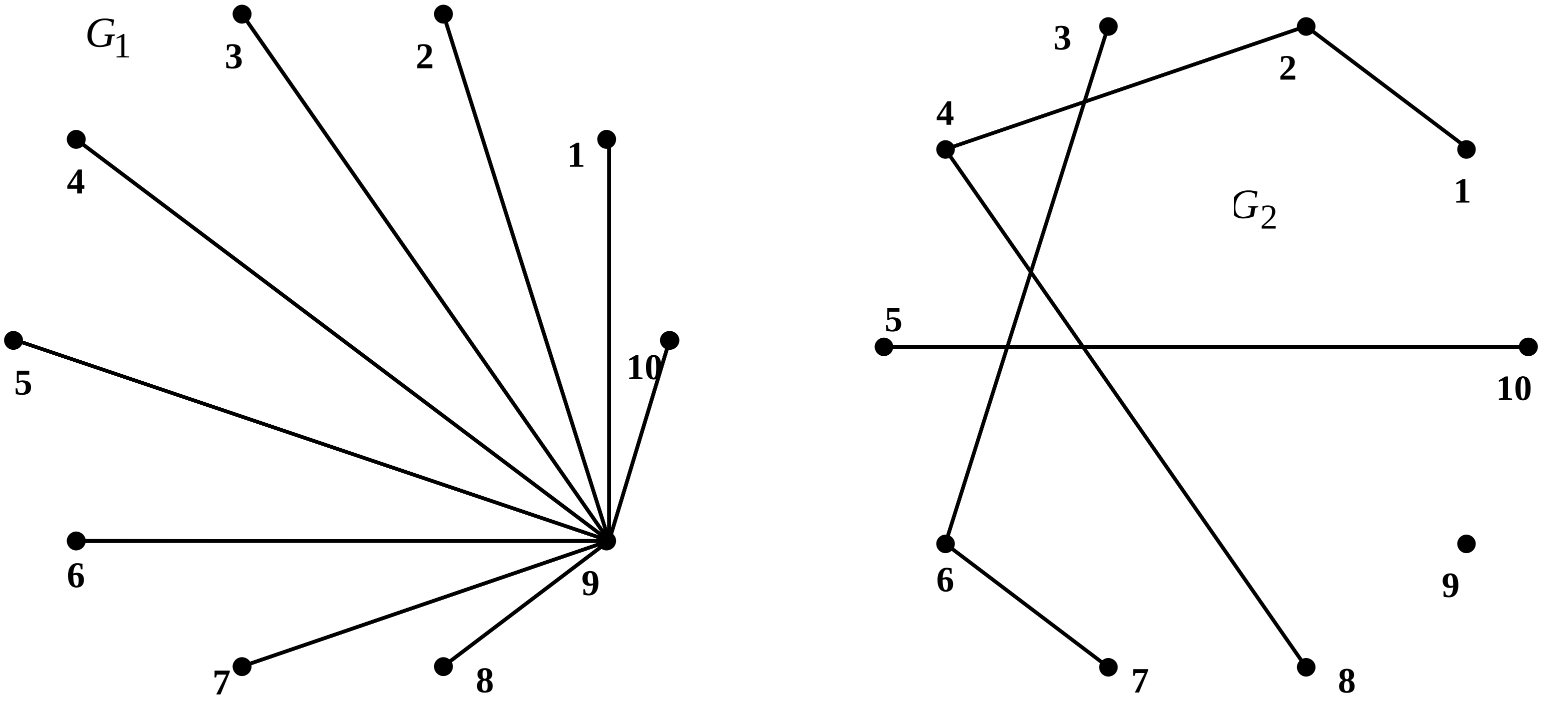
- Το G μη–συνδεδεμένο, το συμπληρωματικό του συνδεδεμένο



Συνδετότητα

- Η ιδιότητα της επικοινωνίας μέσω ενός μονοπατιού είναι σχέση ισοδυναμίας
- Το σύνολο των κορυφών V μπορεί να διαιρεθεί σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας (διαμέριση)
- Σε κάθε κλάση ανήκουν κορυφές οι οποίες επικοινωνούν μεταξύ τους αλλά για κορυφές από διαφορετικές κλάσεις δεν υπάρχει επικοινωνία
- Ο αριθμός των κλάσεων ονομάζεται ***συνδετότητα*** (connectivity) του γραφήματος και συμβολίζεται $k(G)$
- Κάθε κλάση ονομάζεται ***συνδεδεμένη συνιστώσα*** (connected component) και είναι ένα συνδεδεμένο υπογράφημα του G

Παράδειγμα



Συνδεδεμένο και μη συνδεδεμένο γράφημα

Παράδειγμα (συν.)

- G_1: συνδεδεμένο γράφημα χωρίς κυκλώματα (*δένδρο*).
- Μετάβαση από οποιαδήποτε κορυφή σε οποιαδήποτε άλλη μίας διαδομής που περνά από την κορυφή 9
- G_2: μη συνδεδεμένο
- Συνδετότητα είναι $k(G_2) = 4$
- και οι συνδεδεμένες συνιστώσες είναι οι κλάσεις {1,2,4,8}, {3,6,7}, {5,10}, {9}

Παράδειγμα

Εύρεση των συνδεδεμένων συνιστωσών γραφήματος $G=(V,E)$ από πίνακα γειτνίασης:

$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

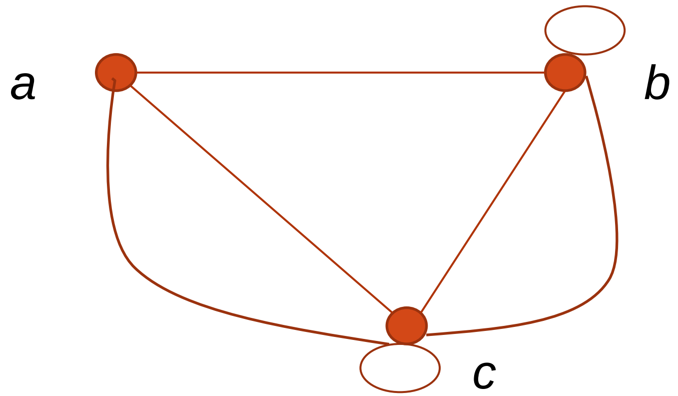
Αναζητούμε μονοπάτια και επομένως τη διαμέριση του G σε κλάσεις ισοδυναμίας, με τη βοήθεια αλγόριθμου.

Παράδειγμα (συν.)

- Αρχίζουμε από ένα υποσύνολο κορυφών V_1, και υποθέτουμε ότι $1 \in V_1$. Από τις μονάδες του πίνακα: το 1 επικοινωνεί απευθείας με τις κορυφές 5 και 6. Από τον πίνακα: η κορυφή 5 συνδέεται μόνο με την 1 και την 6, ενώ με την 6 συνδέονται μόνο οι 1 και 5. Επομένως $V_1 = \{1,5,6\}$
- Θεωρούμε σύνολο V_2 με $2 \in V_2$. Η κορυφή 2 συνδέεται με τις 4,7,8. Η 4 συνδέεται μόνο με τη 2, η 7 με τις 2 και 8 και η 8 με τις 2 και 7. Άρα $V_2 = \{2,4,7,8\}$.
- Η κορυφή 3 δεν συνδέεται με καμία άλλη. Επομένως $V_3 = \{3\}$.
- Προκύπτει ότι η συνδετότητα του G είναι $k(G) = 3$.

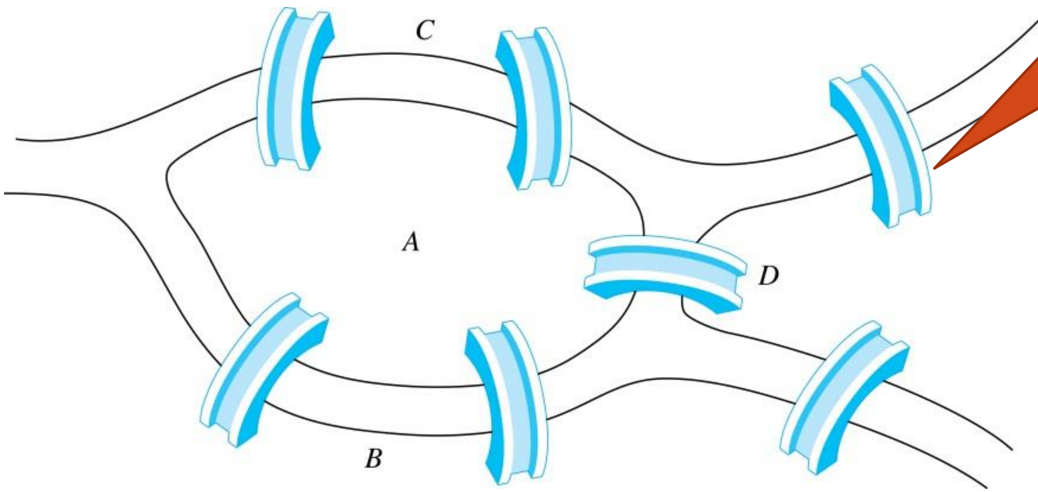
Κάποια άλλα γραφήματα…

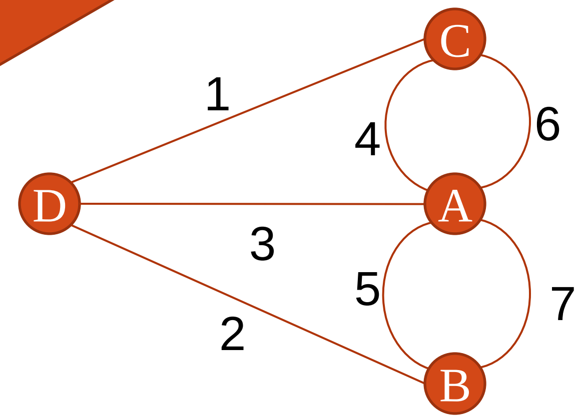
- Σε ένα *απλό γράφημα* δεν υπάρχουν παραπάνω από μία ακμή μεταξύ δύο κόμβων.
- Τα *πολυγραφήματα* μπορεί να έχουν πολλαπλές ακμές μεταξύ δύο κορυφών. Όταν m διαφορετικές ακμές συνδέουν τις κορυφές u και v, τότε λέμε ότι η $\{u,v\}$ είναι μία ακμή με *πολλαπλότητα* m.
- Μία ακμή που συνδέει μία κορυφή με τον εαυτό της λέγεται *βρόχος*.
- Ένα *ψευδογράφημα* μπορεί να περιλαμβάνει βρόχους καθώς και πολλαπλές ακμές μεταξύ δύο κορυφών.



Οι γέφυρες του Königs

Euler μονοπάτι ή κύκλος.
Ένα γράφημα με Euler κύκλο λέγεται Eulerian



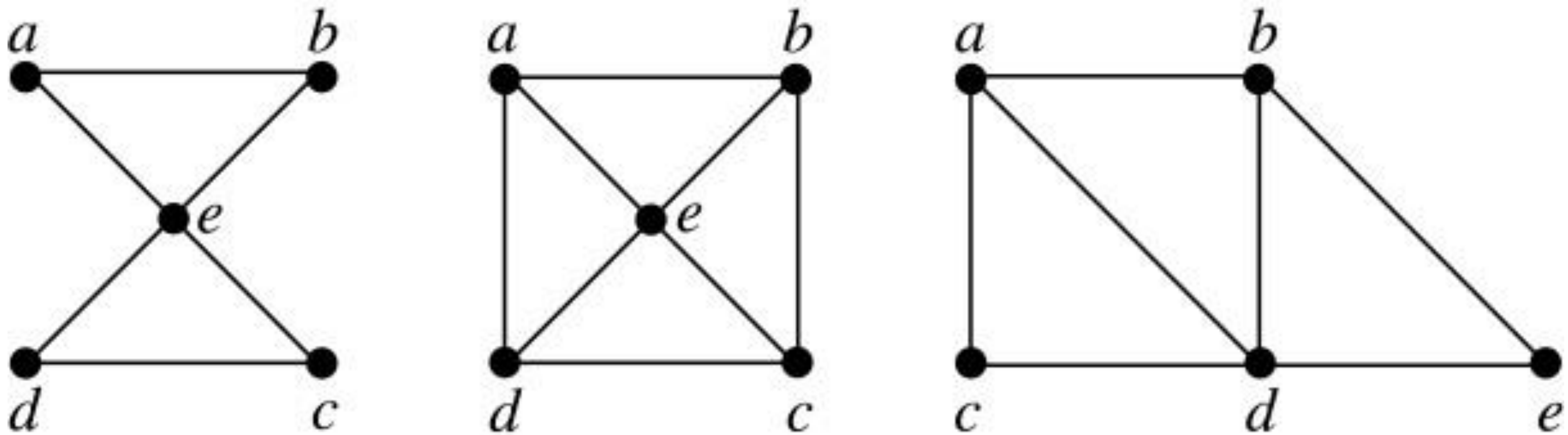


Σε κάθε γράφημα, αν ο βαθμός ενός κόμβου είναι περιττός αριθμός τότε ο κόμβος αυτός δεν μπορεί να είναι εσωτερικός κόμβος του συγκεκριμένου μονοπατιού.

Πότε ένα γράφημα είναι Eulerian (ή μονοκονδυλιά);

Euler Κύκλος

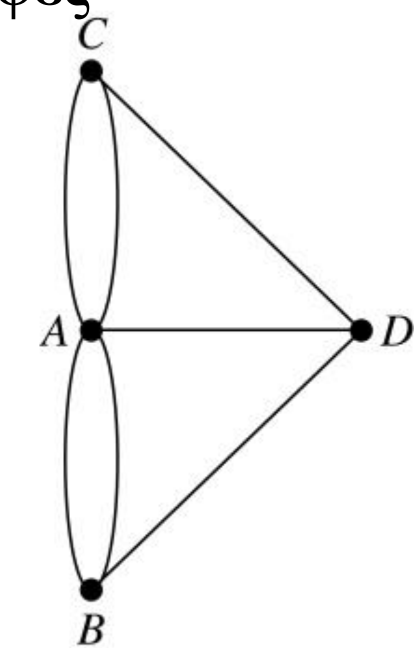
Ποια από τα παρακάτω έχει Euler κύκλο;



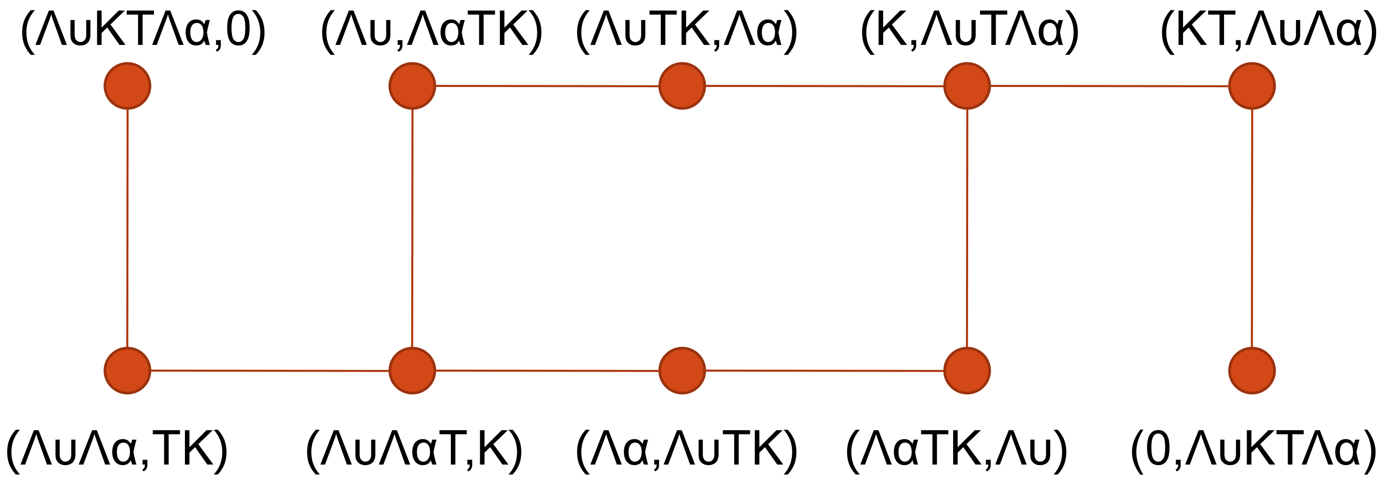
G_1 G_2 G_3

Ικανές και Αναγκαίες Συνθήκες για Euler Κύκλους και Διαδρομές

Θεώρημα: Ένα συνδεδεμένο πολυγράφημα με τουλάχιστον δύο κορυφές έχει Euler κύκλο αν και μόνο αν κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό ενώ έχει Euler διαδρομή αν και μόνο αν έχει ακριβώς δύο κορυφές περιττού βαθμού.



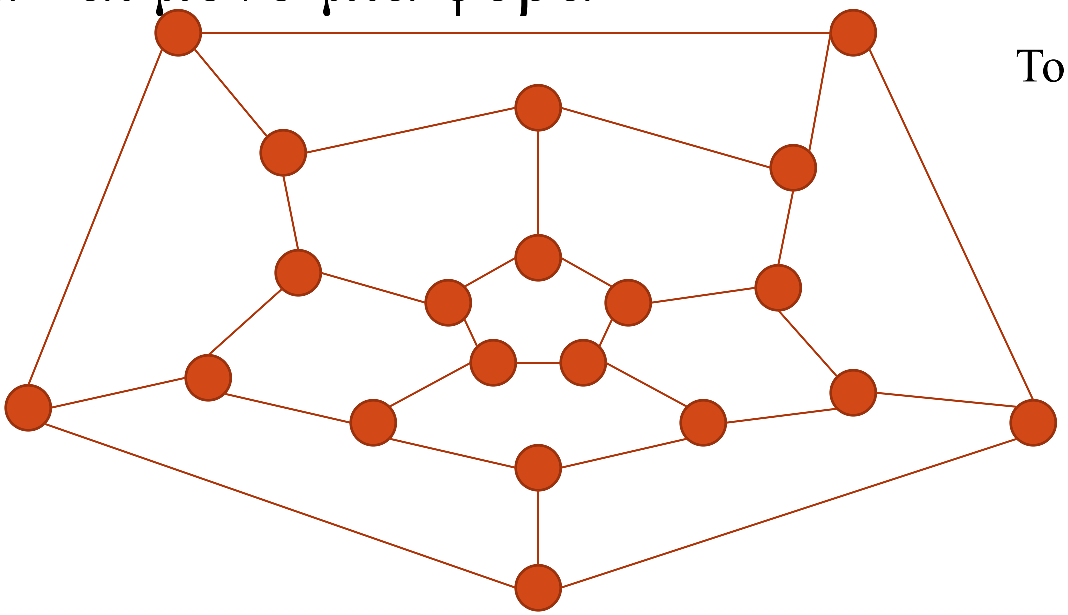
Ο Λύκος, η κατσίκα και το λάχανο…



Hamiltonian Γραφήματα

- Ένα γράφημα λέγεται Hamiltonian αν περιέχει έναν Hamiltonian κύκλο

- Ο Hamiltonian κύκλος ενός γραφήματος είναι ένας κύκλος που περνά από κάθε κορυφή του γραφήματος μία και μόνο μία φορά



Το κουίζ του Hamilton

Το πρόβλημα του Περιοδεύοντος Πωλητή (TSP)

- Έστω γράφημα *G* όπου κάθε ακμή έχει ένας βάρος.
- Ένας Hamiltonian κύκλος του *G* με το ελάχιστο συνολικό βάρος λύνει το TSP.
- Για πλήρες γράφημα το πλήθος των Hamiltonian κύκλων είναι $(n-1)!/2$, για n κορυφές. Γιατί;