ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κατηγορηματικός Λογισμός

Μορφές Θεωρημάτων

- Υπάρχει ένα αντικείμενο ώστε να ισχύει κάτι.
  - Υπαρξιακός ποσοδείκτης ∃

- Για κάθε αντικείμενο ισχύει ότι κάτι.
  - Καθολικός ποσοδείκτης ∀

Κατηγορήματα

Κατηγόρημα είναι μία πρόταση που περιέχει πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και η οποία γίνεται λογική πρόταση όταν οι μεταβλητές αντικαθίστανται από συγκεκριμένες τιμές.

$$x > 3$$

«Το x είναι μεγαλύτερο του 3»

Υποκείμενο Δήλωσης

Κατηγόρημα ή
Κατηγορηματικό Σύμβολο

«Το x είναι μεγαλύτερο του 3» = $P(x)$

$P \rightarrow$ κατηγόρημα («μεγαλύτερο του 3)

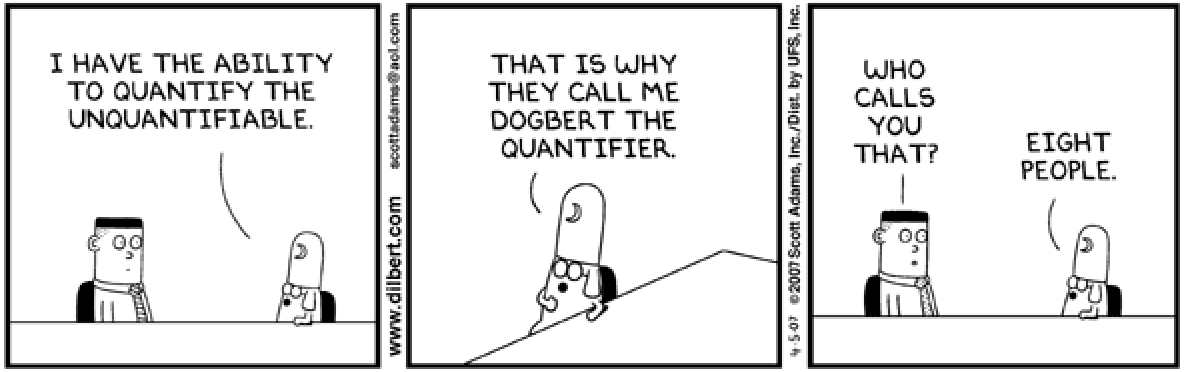
$x \rightarrow$ μεταβλητή

Τιμή (Τ ή F) της
προτασιακής
συνάρτησης *P* στο *x*

Κατηγορηματικός Λογισμός

Ο τομέας της Λογικής που ασχολείται με:

- Κατηγορήματα
- Ποσοτικοποιητές (σε λίγο…)



Ο Καθολικός Ποσοτικοποιητής ∀

$$\forall x P(x)$$

Η $P(x)$ είναι αληθής για όλες τις τιμές του x στο *πεδίο ορισμού* ή *τομέα αναφοράς*.

$$P(x) = x^2 \geq x$$

$$\forall x\ P(x)\ ???$$

(φυσικούς αριθμούς; πραγματικούς;)

Σχέση ∀ και ∧

$$\forall x(P(x)),\ 0 < x \leq 4$$

$$P(x) = \text{“}x^2 < 10\text{”}$$

$$\forall x(P(x)) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

Μέθοδος της εξάντλησης.

$P(4)$ ψευδές και άρα είναι ψευδής.

Ο Υπαρξιακός Ποσοτικοποιητής ∃

$$\exists x \, P(x)$$

Υπάρχει ένα στοιχείο x στο *πεδίο ορισμού* ή *τομέα αναφοράς* έτσι ώστε η $P(x)$ να είναι αληθής.

$$P(x) = x^2 \geq x$$

$$\exists x \, P(x) \text{ ???}$$

(φυσικούς αριθμούς; πραγματικούς;)

Σχέση ∃ και ∨

$$\exists x(P(x)),\ 0 < x \leq 4$$

$$P(x) = \text{“}x^2<10\text{”}$$

$$\exists x(P(x)) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

Μέθοδος της εξάντλησης.

$P(1)$ αληθές και άρα είναι αληθής.

Δέσμευση Μεταβλητών

- ***Δεσμευμένη*** μεταβλητή (εξαρτάται από ποσοδείκτη)
- ***Ελεύθερη*** μεταβλητή (δεν εξαρτάται από ποσοδείκτη)

Γενικά:

Όλες οι μεταβλητές σε προτασιακή συνάρτηση πρέπει να είναι δεσμευμένες είτε με ποσοτικοποιητές ή με ανάθεση τιμής ώστε να θεωρείται λογική πρόταση.

Μερικά Παραδείγματα

- Να δειχτεί ότι $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$.

- Να δειχτεί ότι $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x (P(x) \vee Q(x))$.

Αρνήσεις

Έστω $P(x)$=«Ο x έχει κάνει διακριτά μαθηματικά»

Τι σημαίνει $\forall x\, P(x)$;

Τι σημαίνει $\neg\, (\forall x\, P(x))$;

Άρνηση	**Ισοδύναμο**	**Πότε η άρνηση είναι Αληθής;**	**Πότε είναι Ψευδής;**
$\neg\exists x\, \mathrm{P}(x)$	$\forall x\, \neg P(x)$	Για κάθε x, η $\mathrm{P}(x)$ είναι Ψευδής.	Υπάρχει x έτσι ώστε $\mathrm{P}(x)$ είναι Αληθής.
$\neg\forall x\, P(x)$	$\exists x\, \neg \mathrm{P}(x)$	Υπάρχει x έτσι ώστε $\mathrm{P}(x)$ είναι Ψευδής.	Η $\mathrm{P}(x)$ είναι αληθής γι αόλα τα x.

Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

“Κάθε φοιτητής σε αυτή την τάξη έχει παρακολουθήσει Java.”

Λύση:

Πρώτα αποφασίζουμε τον τομέα αναφοράς *U*.

Λύση 1: Αν το *U* είναι όλοι οι φοιτητές της τάξης, ορίζουμε τη συνάρτηση J(x) = “x έχει παρακολουθήσει Java”

$$\forall x\ J(x)$$

Λύση 2: Όταν το *U* είναι όλοι οι άνθρωποι, ορίζουμε τη συνάρτηση S(x) = “x είναι φοιτητής αυτής της τάξης” και μεταφράζουμε

$$\forall x\ (S(x) \rightarrow J(x))$$

$\forall x\ (S(x) \land J(x))$ είναι λάθος. Τι σημαίνει;

Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

“Κάποιος φοιτητής αυτής της τάξης έχει παρακολουθήσει Java.”

Λύση:

Ποιος είναι ο τομέας αναφοράς *U*;

Λύση 1: Αν *U* είναι όλοι οι φοιτητές της τάξης

$$\exists x \; \mathrm{J}(x)$$

Λύση 2: Αν *U* είναι όλοι οι άνθρωποι

$$\exists x \; (\mathrm{S}(x) \land \mathrm{J}(x))$$

$\exists x \; (\mathrm{S}(x) \rightarrow \mathrm{J}(x))$ είναι λάθος. Τι σημαίνει;

Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

1.«Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια.»

2.«Κάποια λιοντάρια δεν πίνουν καφέ.»

3.«Κάποια άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ.»

$P(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι λιοντάρι.»

$Q(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι άγριο.»

$R(x)$ είναι η δήλωση «Το x πίνει καφέ.»

Πεδίο ορισμού: Όλα τα πλάσματα

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. $\exists x(P(x) \land \neg R(x))$
3. $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$

Εμφωλευμένοι Ποσοτικοποιητές

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0)$$

«Για κάθε *x* υπάρχει κάποιο *y* έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι 0.»

$$\forall x\ \forall\ y\ (x + y = y + x)$$

Αντιμεταθετικός κανόνας πρόσθεσης.

Μετάφραση και Αρνήσεις

«Κάθε πραγματικός αριθμός εκτός από το 0 έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

$$\forall x\,((x \neq 0) \rightarrow \exists y\,(xy=1))$$

$$\neg(\forall x \exists y\,(xy=1))$$

$$\exists x \forall y\,(xy \neq 1)$$

Παράδειγμα

Ένας Έλληνας πεθαίνει από αυτοκινητιστικό κάθε μέρα.

$\exists E \forall M$[Ο E πεθαίνει από αυτοκινητιστικό την ημέρα M]

$\forall M\ \exists E$[Ο E πεθαίνει από αυτοκινητιστικό την ημέρα M]

Ένα Ακόμα Παράδειγμα (1)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Όλα είναι ψείρες”

$$\forall x\, F(x)$$

Παράδειγμα (2)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Κανένα δεν είναι κοριός.”

$\neg\exists x\, S(x)$ Με τί είναι ισοδύναμο;

$\forall x \neg S(x)$

Παράδειγμα (3)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Όλες οι ψείρες είναι κοριοί"

$\forall x\ (F(x) \rightarrow S(x))$

Παράδειγμα (4)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Μερικοί κοριοί είναι τσιμπούρια”

$\exists x\ (F(x) \wedge T(x))$

Παράδειγμα (5)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Κανένας κοριός δεν είναι τσιμπούρι”

$\neg\exists x\ (S(x) \wedge T(x))$ Με τί είναι ισοδύναμο;

$\forall x\ (\neg S(x) \vee \neg T(x))$

Παράδειγμα (6)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Αν κάποια ψείρα είναι κοριός τότε είναι και τσιμπούρι”

$$\forall x\ ((F(x) \land S(x)) \rightarrow T(x))$$

Παράδειγμα από Χαρακτηριστικά Συστημάτων

- Ο Κατηγορηματικός Λογισμός χρησιμοποιείται για καθορισμό ιδιοτήτων που πρέπει να ικανοποιεί κάποιο σύστημα.
- Παράδειγμα:
  - "Κάθε ηλ. μήνυμα >1MB θα συμπιέζεται."
  - "Αν ένας χρήστης είναι ενεργός, τουλάχιστον μία δικτυακή σύνδεση θα είναι διαθέσιμη."
- Καθορισμός κατηγορημάτων και τομέων αναφοράς (δεν τα αναφέρω ρητά):
  - $L(m, y)$ = "Το μήνυμα m είναι $>y$ MB."
  - $C(m)$ = "Το μήνυμα m θα συμπιεστεί."
  - $A(u)$ = "Ο χρήστης u είναι ενεργός."
  - $S(n, x)$ = "Η σύνδεση n είναι σε κατάσταση x."

$$\forall m(L(m,1) \rightarrow C(m))$$

$$\exists u\, A(u) \rightarrow \exists n\, S(n, available)$$

Σειρά Ποσοτικοποιήσεων

$$\exists x \forall y\ (x + y = 0)$$

Αυτή η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Γιατί;

$$\forall x \exists y\ (x + y = 0)$$

Αυτή η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Γιατί;

Παράδειγμα

Έστω U το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$P(x,y) : x \cdot y = 0$

Ποια είναι η τιμή αληθείας των:

1. $\forall x \forall y P(x,y)$

   Ψευδής

2. $\forall x \exists y P(x,y)$

   Αληθής

3. $\exists x \forall y\ P(x,y)$

   Αληθής

4. $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$

   Αληθής

Μετάφραση Προτάσεων σε Γλώσσα

Παράδειγμα: $\forall x \ (C(x) \lor \exists y \ (C(y) \land F(x, y)))$

$C(x)$ = “x έχει Η/Υ” και $F(x,y)$ = “x και y είναι φίλοι” και ο τομέας αναφοράς για τα x και y είναι όλοι οι φοιτητές του τμήματος.

Κάθε φοιτητής στο τμήμα έχει Η/Υ ή έχει φίλο που έχει Η/Υ.

Παράδειγμα: $\exists x \forall y \forall z \ ((F(x, y) \land F(x,z) \land (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y,z))$

Υπάρχει φοιτητής του οποίου κανένας φίλος δεν είναι φίλος με τους υπόλοιπους φίλους του.

Μετάφραση Προτάσεων σε Γλώσσα

“Υπάρχει κάποια γυναίκα που έχει πάρει πτήση από κάθε αεροπορική εταιρία στον κόσμο.”

Λύση:

1. Έστω $P(w,f)$ = “η w έχει πάρει την f ” και $Q(f,a)$ = “η f είναι πτήση της a .”
2. Ο τομέας αναφοράς της w είναι όλες οι γυναίκες, της f όλες οι πτήσεις και της a όλες οι εταιρίες.
3. Η πρόταση μεταφράζεται ως:

$$\exists w \, \forall a \, \exists f \; (P(w,f) \wedge Q(f,a))$$

Η άρνηση της πρότασης;;;;

Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Καθολική αμεσότητα:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(c)$$

όπου c συγκεκριμένο μέλος του πεδίου ορισμού της x.

Καθολική Γενίκευση:

$$P(c) \text{ για αυθαίρετο } c \rightarrow \forall x P(x)$$

Καθολική Συνεπαγωγή

Καθολικό *Modus Ponens*:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

$$P(a) \text{ για συγκεκριμένο } a$$

$$\therefore\ Q(a)$$

Καθολικό *Modus Tollens*:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

$$\neg Q(a) \text{ για συγκεκριμένο } a$$

$$\therefore\ \neg P(a)$$

Καθολική Μεταβατικότητα

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$
$$\forall x(Q(x) \to R(x))$$
$$\therefore\ \forall x(P(x) \to R(x))$$

Παράδειγμα:

1. Όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια.
2. Αν ένα αντικείμενο είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε είναι επάνω από όλους τους κύκλους.
3. Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων τότε δεν είναι γαλάζιο.

$\therefore$ Όλα τα τρίγωνα είναι επάνω από όλους τους κύκλους.

Παράδειγμα

$P(x)$: «x είναι τρίγωνο»

$Q(x)$: «x είναι γαλάζιο»

$R(x)$: «x είναι δεξιά όλων των τετραγώνων»

$S(x)$: «x είναι πάνω από όλους τους κύκλους»

«Όλα τα τρίγωνα είναι γαλάζια.» ≡ «Για κάθε x, αν το x είναι τρίγωνο τότε είναι γαλάζιο.» ≡ $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

«Αν ένα αντικείμενο είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε είναι επάνω από όλους τους κύκλους.» ≡ «Για κάθε x, αν το x είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε το x είναι επάνω από όλους τους κύκλους.» ≡ $\forall x(R(x) \rightarrow S(x))$

«Αν ένα αντικείμενο δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων τότε δεν είναι γαλάζιο.» ≡ «Για κάθε x, αν το x δεν είναι στα δεξιά όλων των τετραγώνων, τότε το x δεν είναι γαλάζιο.» ≡ $\forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg Q(x)) \equiv \forall x(Q(x) \rightarrow R(x))$

Άρα από μεταβατικότητα: $\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$

Κανόνες για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Υπαρξιακή Αμεσότητα:

$$\exists x P(x) \rightarrow P(c) \text{ για κάποιο } c$$

όπου c συγκεκριμένο μέλος του πεδίου ορισμού της x.

Υπαρξιακή Γενίκευση:

$$P(c) \text{ για κάποιο στοιχείο } c \rightarrow \exists x P(x)$$

Παράδειγμα Εξαγωγής Συμπεράσματος

1.«Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια.»

2.«Κάποια λιοντάρια δεν πίνουν καφέ.»

3.«Κάποια άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ.»

$P(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι λιοντάρι.»

$Q(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι άγριο.»

$R(x)$ είναι η δήλωση «Το x πίνει καφέ.»

Πεδίο ορισμού: Όλα τα πλάσματα

$$1.\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$2.\ \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\therefore \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι οι προϋποθέσεις: 1.«Ένας σπουδαστής στην τάξη αυτή δεν έχει διαβάσει το βιβλίο.» και 2.«Ο καθένας στην τάξη αυτή πέρασε το πρώτο διαγώνισμα.» συνεπάγονται «Κάποιος που πέρασε το πρώτο διαγώνισμα δεν έχει διαβάσει το βιβλίο.»

$C(x)$: «Ο x είναι στην τάξη αυτή.»

$B(x)$: «Ο x έχει διαβάσει το βιβλίο.»

$P(x)$: «Ο x πέρασε το πρώτο διαγώνισμα.»

1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
2. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$

$\therefore\ \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ Προϋπόθεση
2. $C(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$ Υπαρξιακή Αμεσότητα από 1
3. $C(\alpha)$ απλοποίηση από 2
4. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ Προϋπόθεση
5. $C(\alpha) \rightarrow P(\alpha)$ Καθολική αμεσότητα από 4
6. $P(\alpha)$ Modus Ponens 3,5
7. $\neg B(\alpha)$ απλοποίηση από 2
8. $P(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$ Σύζευξη 6,7
9. $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$ Υπαρξιακή Γενίκευση από 8

Σφάλμα Αντιστρόφου

1. «Όλοι οι εγκληματίες της πόλης συχνάζουν στο μπαρ Η Φωλιά της Κότας».
2. «Ο Γιάννης συχνάζει στο μπαρ Η Φωλιά της Κότας».

$\therefore$ «Ο Γιάννης είναι ένας από τους εγκληματίες της πόλης»

Όμως αν (τρόπος σκέψης γιατρών, μηχανικών κτλ.):

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

είναι αληθής και η $Q(a)$ είναι αληθής για συγκεκριμένο a τότε η $P(a)$ ***μπορεί*** να είναι Αληθής.

Αυτή είναι η ***τεχνική της απαγωγής***.

Μέθοδοι Αποδείξεων

Αποδείξεις για Ποσοτικοποιημένες Προτάσεις

Αποδείξεις Ύπαρξης:

Πολλά θεωρήματα κάνουν ισχυρισμούς ότι υπάρχουν αντικείμενα συγκεκριμένου τύπου.

$$\exists x P(x)$$

Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: εύρεση στοιχείου a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής.

Μη Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: δεν βρίσκουμε στοιχείο a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής, αλλά με άλλο τρόπο (π.χ. αντίφαση) βρίσκουμε ότι η $\exists x P(x)$ είναι Αληθής.

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα κύβων θετικών ακέραιων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

$$1729=10^3+9^3=12^3+1^3$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί x και y έτσι ώστε ο x^y να είναι ρητός.

Αποδείξεις Μοναδικότητας

Κάποια θεωρήματα ισχυρίζονται ύπαρξη μοναδικού σημείου με συγκεκριμένη ιδιότητα.

Ο τρόπος απόδειξης είναι:

1. Ύπαρξη: αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στοιχείο x με την ιδιότητα
2. Μοναδικότητα: Δείχνουμε ότι αν $x \neq y$, τότε το y δεν έχει την ιδιότητα.

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι κάθε ακέραιος έχει έναν μοναδικό προσθετικό αντίστροφο.

Αντιπαράδειγμα

Μπορούμε να δείξουμε ότι η δήλωση της μορφής $\forall x P(x)$ είναι ψευδής αν μπορούμε να βρούμε μία τιμή a για την οποία η $P(a)$ να είναι ψευδής (το αντιπαράδειγμα).

<u>Παράδειγμα:</u> Να δειχθεί ότι η δήλωση «Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα των τετραγώνων τριών ακεραίων» είναι Ψευδής.

<u>Παράδειγμα:</u> Όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί. (κάντε το παίρνοντας το συμπλήρωμα)

Ασκήσεις…

1.5.49 Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν 100 διαδοχικοί ακέραιοι θετικοί αριθμοί που δεν είναι τέλεια τετράγωνα. Η απόδειξη είναι εποικοδομητική ή μη-εποικοδομητική;

1.5.52 Να δειχτεί ότι το γινόμενο δύο από τους παρακάτω αριθμούς είναι μη αρνητικό. Η απόδειξη είναι εποικοδομητική ή μη-εποικοδομητική;

$$65^{1000}-8^{2001}+3^{177}, 79^{1212}-9^{2399}+2^{2001}, 24^{4493}-5^{8192}+7^{1777}$$

1.5.58 Να δειχτεί ότι αν ο x είναι πραγματικός αριθμός υπάρχουν ακέραιος n και $0 \leq \varepsilon \leq 1$ έτσι ώστε $x = n + \varepsilon$.

Ασκήσεις…

1.5.68 Να αποδειχτεί ότι μία σκακιέρα 8×8 μπορεί να καλυφθεί εντελώς από ντόμινο μεγέθους 1×2.

1.5.69 Να αποδειχτεί ότι είναι αδύνατο να καλύψουμε εντελώς με ντόμινο μεγέθους 1×2 μία σκακιέρα 8×8 αν απομακρυνθούν δύο τετράγωνα σε απέναντι γωνίες της σκακιέρας.

Ασκήσεις

1.27 Να αποδειχτεί ότι αν ο x≥0 είναι άρρητος, τότε και ο √x είναι επίσης άρρητος.

Θέμα 3ο: (1,5 Μονάδες) (4/9/2012)

Έστω οι προϋποθέσεις $\exists y\big(L(y) \land \neg K(y)\big)$ και $\forall y\big(L(y) \longrightarrow Q(y)\big)$. Χρησιμοποιώντας κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων να παράγετε το συμπέρασμα $\exists y\big(Q(y) \land \neg K(y)\big)$. Να αναγράφετε ποιον κανόνα χρησιμοποιείτε κάθε φορά.