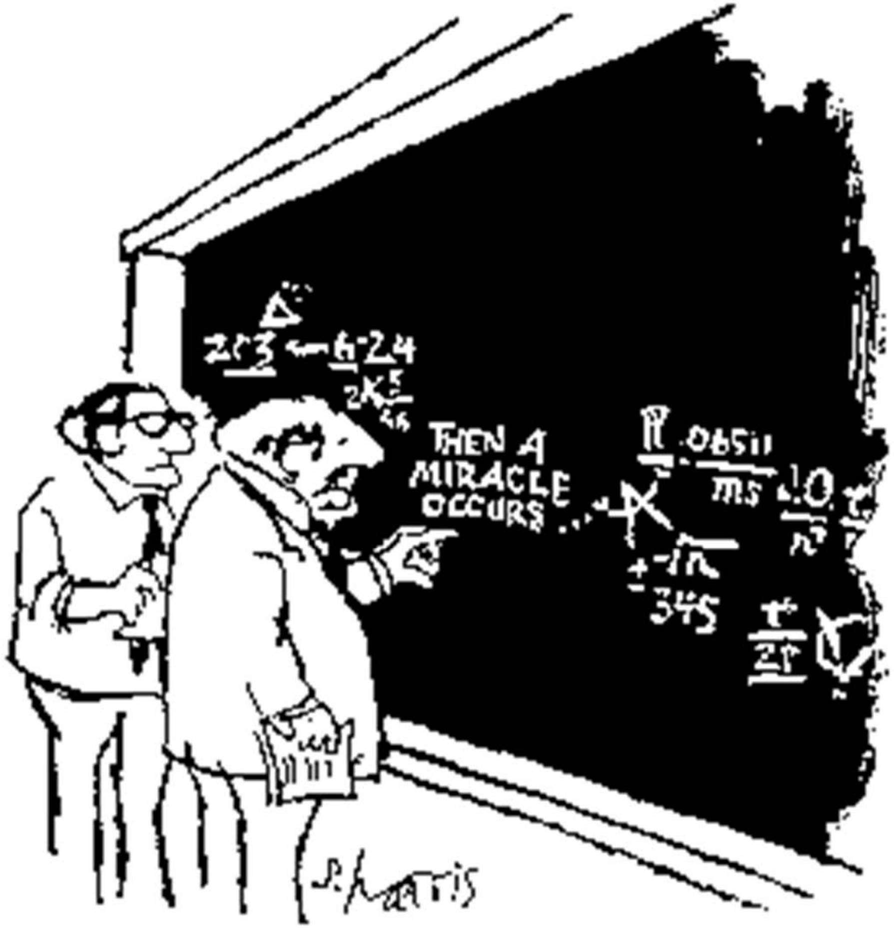

"I THINK YOU SHOULD BE MORE EXPLICIT HERE IN STEP TWO."

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βασικά Στοιχεία Λογικής

Η Πριγκίπισσα και το

Αν ρώταγα ένα μέλος της φυλής που δεν ανήκεις για το ποιον δρόμο πρέπει να πάρω για το κάστρο τι θα μου έλεγε;

Μία πριγκίπισσα επισκέπτεται ένα νησί που κατοικείται από 2 φυλές. Τα μέλη της μίας φυλής λένε πάντα αλήθεια ενώ τα μέλη της άλλης πάντα ψέματα.

Η πριγκίπισσα φτάνει σε δύο μονοπάτια. Θα πρέπει να ξέρει ποιο μονοπάτι θα ακολουθήσει έτσι ώστε να αποφύγει το δράκο που βρίσκεται στο ένα μονοπάτι και να σώσει τον πρίγκιπα από τον κακό μάγο στο κάστρο που βρίσκεται στο άλλο μονοπάτι.

Στην αρχή των δύο μονοπατιών υπάρχει 1 μέλος από κάθε φυλή χωρίς όμως να ξέρει ποιος λέει αλήθεια και ποιος ψέματα. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει η πριγκίπισσα για να βρει το δρόμο προς το κάστρο;

Κάτι για να σκεφτόμαστε...

Κάτω από μία καρυδιά κάθονται 3 άνθρωποι. Ο Κωστίκας (*Κ*), ο Γιωρίκας (*Γ*) και ο Πανίκας (*Π*). Ας υποθέσουμε ότι καθένας από αυτούς μπορεί να λέει μόνο αλήθεια ή ψέματα.

- Ο *Κ* λέει, «Όλοι μας είμαστε ψεύτες»
- Ο *Γ* λέει «Ακριβώς ένας λέει αλήθεια»

Ποιος από τους τρεις λέει ψέματα και ποιος αλήθεια;

(μπορεί η πληροφορία να μην είναι αρκετή.....)

Λογική

«Λογική είναι η επιστήμη των απαραίτητων κανόνων της σκέψης, χωρίς τους οποίους δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κατανόηση ή συλλογισμός.»

Immanuel Kant, 1785

«Αν ένα γεγονός είναι ενάντια στη κοινή λογική, αλλά παρόλα αυτά είμαστε υποχρεωμένοι να το δεχθούμε και να ασχοληθούμε μαζί του, τότε μαθαίνουμε να αλλάζουμε την έννοια της κοινής λογικής.»

P. J Davis and R. Hersh, 1981

Λογική – Εφαρμογές στην Πληροφορική

- Λογικά κυκλώματα(Logic Circuits)
  - Λογικά κυκλώματα σχηματίζονται με συνδυασμούς πυλών AND, OR, NOT.
  - Στη λογική, προτάσεις συνδυάζονται με σύζευξη, διάζευξη, άρνηση
  - Κάθε κύκλωμα μπορεί να χαρακτηριστεί από μια πρόταση του Προτασιακού Λογισμού
  - Προβλήματα σχεδιασμού κυκλωμάτων μεταφράζονται σε προβλήματα εύρεσης αντίστοιχων προτάσεων και του χειρισμού αυτών

Λογική – Εφαρμογές στην Πληροφορική

- Προγραμματισμός: τύποι δεδομένων Boolean
  - επιδέχονται τιμές true, false
  - μπορούν να συνδυαστούν μέσω συνδετικών *and*, *or*, *not* για να παράγουν σύνθετες εκφράσεις του ίδιου τύπου
  - Π.χ., η έκφραση

if (A and B) or (A and C) then ….

μπορεί να απλοποιηθεί στην ισοδύναμη έκφραση

if A and (B or C) then ….

Η ισοδυναμία των δύο εκφράσεων δίνεται από τα αξιώματα του Προτασιακού Λογισμού

Λογική – Εφαρμογές στην Πληροφορική

- Σχεδίαση Προγραμμάτων (Program Design)
  - ο σχεδιασμός προγραμμάτων απαιτεί την κατάρτιση προδιαγραφών (program specifications) που περιγράφουν τη συμπεριφορά του προγράμματος
  - οι προδιαγραφές μπορούν να γραφούν σε τυπικές γλώσσες οι οποίες συχνά επιτρέπουν την επαλήθευση της σωστής συμπεριφοράς του προγράμματος
  - η Λογική μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή του ίδιου του προγράμματος αλλά και της επιθυμητής συμπεριφοράς του
  - ζητούμενο είναι να αποδειχθεί ότι η συμπεριφορά είναι λογική συνέπεια της περιγραφής

Λογική – Εφαρμογές στην Πληροφορική

- Λογικός Προγραμματισμός
- Αυτοματοποιημένος Λογισμός
- Τεχνητή Νοημοσύνη
- Βάσεις Δεδομένων και Γνώσεων

Λογικές προτάσεις

- Λογική πρόταση ή απλά ***πρόταση*** (proposition-statement):
  - Δήλωση αποτελούμενη από σύμβολα ή λέξεις και η οποία είναι είτε ***ψευδής*** (False) είτε ***αληθής*** (True) αλλά όχι και τα δύο
- Η πρόταση έχει μία μόνο ***τιμή αληθείας*** (truth value)
- Συμβολισμός: *F, T*

Παραδείγματα

- Ο αριθμός 3 διαιρεί τον αριθμό 10 (F)
- Ο κροκόδειλος μπορεί να πετάξει (F)
- $2^7=128$ (T)
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών (*εικασία του Goldbach*) (F ή T;)

Δεν θεωρούνται προτάσεις:

$x \in \mathbf{N}$

$x^2 = -1$

Ποιοι είναι οι διαιρέτες του 123;

Να δείξετε τη σχέση:

Σύνθετες προτάσεις

- ***Σύνθετες*** (compound) ***προτάσεις:*** προκύπτουν από σύνδεση άλλων προτάσεων με λογικούς συνδέσμους (υποδηλώνει μεταξύ τους σχέση)
- Σύνδεσμοι: ***λογικές πράξεις*** ή ***λογικοί τελεστές*** (logical operators).
- Οι λογικές πράξεις ορίζονται με τη βοήθεια του ***πίνακα αληθείας*** (truth table)

Προτασιακή Λογική

Ο τομέας της λογικής που ασχολείται με προτάσεις.

Σύζευξη (conjunction)

- "p και q"

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα βρέχει»

Σύζευξη;

Διάζευξη (disjunction)

- "p ή q"

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα βρέχει»

Διάζευξη;

Αποκλειστική Διάζευξη (disjunction)

- "*p* ή *q αλλά όχι και τα δύο*"

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα βρέχει»

Αποκλειστική Διάζευξη;

Λογικές Πράξεις: Άρνηση (negation)

- "όχι " p :

Πίνακας Αληθείας

p	$\neg p$
F	T
T	F

Παράδειγμα

Α = Όλα τα ξένα πορτοκάλια είναι άγευστα. (F)

Τι σημαίνει όχι Α;

Α) Όλα τα ξένα πορτοκάλια είναι καλά.

Β) Όλα τα ξένα πορτοκάλια δεν είναι άγευστα.

Γ) Τουλάχιστον ένα πορτοκάλι είναι εύγευστο.

Δ) Τουλάχιστον ένα πορτοκάλι δεν είναι άγευστο.

Ε) Όλα τα ντόπια πορτοκάλια είναι καλά.

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή»

«Είμαι από τον Άρη.»

Άρνηση;

Συνεπαγωγή (implication)

- «p συνεπάγεται την q» ($\neg p \vee q$)
- «Αν p τότε q»

Υπόθεση

Συμπέρασμα

$$p \rightarrow q$$

Συνεπαγωγή (implication)

Αν εκλεγώ θα μειώσω τους φόρους.

- «p συνεπάγεται την q» ($\neg p \vee q$)
- «Αν p τότε q»

Υπόθεση

Συμπέρασμα

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

<u>*Ένα ανέκδοτο*</u>: Κάποιος θεώρησε λάθος την ιδέα ότι ξεκινώντας από λάθος πρότασεις μπορείς να καταλήξεις σε μία οποιαδήποτε αληθής πρόταση και προκάλεσε τον B. Russell να δείξει ότι αν 1=2 τότε ο B.R. είναι ο πάπας. Τί νομίζετε ότι είπε;

Έστω 1=2. Έγω και ο πάπας είμαστε δύο, άρα εγώ και ο πάπας είμαστε ένα.

Συνεπαγωγή

Αν σήμερα είναι Πάσχα, τότε αύριο είναι Δευτέρα.

1. Η *αντίστροφη* της $p \to q$ είναι η $q \to p$.
2. Η *αντίθετη* της $p \to q$ είναι η $\neg p \to \neg q$.
3. Η *αντιθετοαντίστροφη* της $p \to q$ είναι η $\neg q \to \neg p$.

Αν αλλάξει ο καθηγητής θα περάσω τα Διακριτά.

Μία συνεπαγωγή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της. (απόδειξη με πίνακα αληθείας ή με ιδιότητες)

Ισοδυναμία (equivalence)

«p είναι ισοδύναμη με q»

είναι ισοδύναμο με $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

p=“Είμαι ενήλικας”
q=“Είμαι ≥18 χρονών”

Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη

Η r είναι μία ***ικανή συνθήκη*** για την s

«αν r τότε s»

Η r είναι μία ***αναγκαία συνθήκη*** για την s

«αν όχι r τότε όχι s»

«αν s τότε r»

Παράδειγμα: «Αν ο Γιάννης έχει δικαίωμα ψήφου, τότε είναι τουλάχιστον 18 ετών.»

Παράδειγμα

«Ένας αριθμός είναι ζυγός αν και μόνο αν διαιρείται τέλεια από το 2.»

Αναγκαία ?

Ικανή ?

Προτεραιότητα Λογικών Τελεστών

Γενικά καθορίζουμε την προτεραιότητα με τις παρενθέσεις. Όταν δεν το κάνουμε αυτό τότε οι τελεστές με σειρά προτεραιότητας από υψηλότερη προς χαμηλότερη είναι:

1. Άρνηση
2. Σύζευξη
3. Διάζευξη
4. Συνεπαγωγή
5. Ισοδυναμία

Σύνθετες προτάσεις

- Προτάσεις $p_1, \ldots, p_n$
- Λογικές πράξεις $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Σύνθετες προτάσεις $P(p_1, \ldots, p_n)$

Από Φυσική Γλώσσα

«Μπορείτε να έχετε πρόσβαση στο Διαδίκτυο από την πανεπιστημιούπολη, μόνο αν σπουδάζετε Πληροφορική ή, αν δεν είστε νέοι φοιτητές»

Λογική πρόταση;

Πίνακας Αληθείας Σύνθετης Πρότασης

Όταν μια σύνθετη πρόταση αποτελείται από n απλές προτάσεις, ο πίνακας αληθείας αποτελείται από 2^n γραμμές

Παράδειγμα

$$P(p,q,r) = \neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$	$\neg p \vee r$	$\neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$
T	T	T	F	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	F

Ταυτολογία και αντίφαση

- ***Ταυτολογία*** (tautology):
  - Σύνθετη πρόταση η οποία παίρνει σε όλες τις περιπτώσεις τιμή αληθείας *T*

- ***Αντίφαση*** (contradiction):
  - Σύνθετη πρόταση που παίρνει σε όλες τις περιπτώσεις τιμή αληθείας *F*

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

Ίσες προτάσεις

Δεν είναι λογικός σύνδεσμος. Η $p \equiv q$ δεν είναι λογική πρόταση.

- ***Ίσες ή λογικά ισοδύναμες*** σύνθετες προτάσεις:

$$P(p_1,\dots,p_n) \equiv Q(p_1,\dots,p_n)$$

- Όταν οι πίνακες αληθείας τους είναι ίδιοι

- Αποδεικνύεται ότι η ισότητα δύο προτάσεων ισχύει αν και μόνο αν η πρόταση

$$P(p_1,\dots,p_n) \leftrightarrow Q(p_1,\dots,p_n)$$

είναι ταυτολογία

Παράδειγμα – Νόμοι De Morgan

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

Παράδειγμα – Νόμοι De Morgan

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

Λογικές Ισοδυναμίες

Νόμος	**Περιγραφή**
Ταυτότητας	$p \leftrightarrow p$
Διπλής άρνησης	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
Αποκλείσεως τρίτου	$p \vee \neg p \leftrightarrow T$
Αντιφατικότητας	$\neg(p \wedge \neg p) \leftrightarrow T$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Αντιμεταθετικότητας	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
Προσεταιριστικότητας	$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Αντιθετικός	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Επιμεριστικός	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Αναδιάταξης	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$
Εξαγωγής	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Μέθοδοι Απόδειξης

Θεώρημα: Μία δήλωση που μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει.

Απόδειξη: Το επιχείρημα που αποτελείται από τη σειρά δηλώσεων που χρησιμοποιούμε για να καταλήξουμε στο θεώρημα.

Αξίωμα: Υποθέσεις που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη του θεωρήματος.

Κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων: τα μέσα που χρησιμοποιούνται για εξαγωγή συμπερασμάτων από άλλες δηλώσεις (βήματα απόδειξης)

Εγκυρότητα Απόδειξης

Αν κάθε φορά που όλες οι υποθέσεις είναι αληθείς τότε είναι αληθές και το συμπέρασμα.

Δείξτε ότι η παρακάτω απόδειξη δεν είναι έγκυρη:

$$p \to q \vee \neg r$$

$$q \to p \wedge r$$

$$\therefore p \to r$$

Κανόνας Απόσπασης (modus ponens)

$$(p \wedge (p \to q)) \to q \text{ ή}$$

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Παράδειγμα:
«Αν σήμερα χιονίσει τότε θα κάνουμε σκι.»
«Σήμερα χιονίζει.»
Άρα: «Θα κάνουμε σκι.»

Μέθοδος Άρνησης (modus tollens)

$$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p \text{ ή}$$

$$p \to q$$

$$\neg q$$

$$\therefore \neg p$$

Παράδειγμα:

«Αν ο Δίας είναι άνθρωπος, τότε ο Δίας είναι θνητός.»

«Ο Δίας δεν είναι θνητός.»

Άρα: «Ο Δίας δεν είναι άνθρωπος.»

Κανόνες

$p \rightarrow (p \vee q)$	Πρόσθεση (γενίκευση)
$(p \wedge q) \rightarrow p$	Απλοποίηση (ειδίκευση)
$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Σύζευξη
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus Ponens
$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus Tollens
$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow \ (p \rightarrow r)$	Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα)
$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	Διαζευκτικός Συλλογισμός (Απαλοιφή)
$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	Διαχωρισμός

Παράδειγμα – Είναι έγκυρο;

«Δεν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα και έχει περισσότερο κρύο από χθες.»

«Αν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα τότε θα κολυμπήσουμε.»

«Αν δεν θα κολυμπήσουμε, τότε θα πάμε με το κανό.»

«Αν θα πάμε με το κανό, θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

∴ « Θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

Το συμπέρασμα δεν είναι έγκυρο.

Παράδειγμα – Είναι έγκυρο;

«Δεν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα και έχει περισσότερο κρύο από χθες.»

«Αν δεν έχει ήλιο τότε δεν θα κολυμπήσουμε.»

(Θα κολυμπήσουμε μόνο αν έχει ήλιο)

«Αν δεν θα κολυμπήσουμε, τότε θα πάμε με το κανό.»

«Αν θα πάμε με το κανό, θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

∴« Θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

Το συμπέρασμα είναι έγκυρο.

Μέθοδοι Απόδειξης

Μέθοδοι Απόδειξης Θεωρημάτων

Άμεση Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε με διαδοχικά βήματα ότι αν p είναι Αληθής τότε και η q είναι αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε και ο n^2 είναι περιττός.

Έμμεση Απόδειξη

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε ότι η αντιθετοαντίστροφή της $\neg q \rightarrow \neg p$ *είναι* Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο $3n+2$ είναι περιττός τότε και ο n είναι περιττός.

Απόδειξη με Αντίφαση

Έστω ότι μπορεί να βρεθεί μία αντίφαση (F) q έτσι ώστε $\neg p \rightarrow q$ να είναι Αληθής. Άρα η πρόταση $\neg p$ είναι Ψευδής και άρα η p θα πρέπει να είναι Αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ο αριθμός $2^{½}$ είναι άρρητος χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντίφαση.

Αποδείξεις κατά Περίπτωση

Για να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή τη μορφής

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$$

χρησιμοποιούμε την ταυτολογία:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να χρησιμοποιηθεί απόδειξη κατά περίπτωση για να δειχτεί ότι $|xy|=|x||y|$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αποδείξεις Ισοδυναμίας

Για να αποδείξουμε θεώρημα που είναι ισοδυναμία, δηλαδή της μορφής $p \leftrightarrow q$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτολογία:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος n είναι περιττός *αν και μόνο αν* ο n^2 είναι περιττός.

Λογικές Πλάνες

Σφάλμα κατά τον συλλογισμό που μας οδηγεί σε λάθος συμπέρασμα.

1. Σφάλμα αντιστρόφου:

   «Αν ο Κώστας αντιγράφει, τότε κάθεται στην τελευταία σειρά.»

   «Ο Κώστας κάθεται στην τελευταία σειρά.»

   ∴ «Ο Κώστας αντιγράφει.»

2. Σφάλμα αντιθέτου:

   «Αν τα επιτόκια αυξηθούν, οι τιμές στο χρηματιστήριο θα πέσουν.»

   «Τα επιτόκια δεν αυξάνονται.»

   ∴ «Οι τιμές στο χρηματιστήριο δεν θα πέσουν.»

Ο Κωστίκας, ο Γιωρίκας και ο Πανίκας...

- Για κάθε όνομα μία boolean μεταβλητή έτσι ώστε αν λέει ψέματα να είναι 0, αν λέει αλήθεια να είναι 1.
- Η πρόταση Ρ=«Όλοι μας λέμε ψέματα» είναι η Ρ=Κ΄Γ΄Π΄.
- Η πρόταση Σ=«Ακριβώς ένας λέει αλήθεια» είναι η Σ=ΚΓ΄Π΄+Κ΄ΓΠ΄+Κ΄Γ΄Π.

- Φτιάχνουμε τον πίνακα αληθείας για όλους τους συνδυασμούς ΡΣ(ΚΓ), Ρ΄Σ(Κ΄Γ), Ρ΄Σ΄(Κ΄Γ΄), ΡΣ΄(ΚΓ΄). Αν υπάρχει ένα **1** λύθηκε αλλιώς ....

Άλλος Τρόπος

Έστω ότι ο K λέει αλήθεια.

∴ Όλοι λένε ψέματα (από αυτό που λέει ο K)

∴ Αντίφαση: O K λέει αλήθεια και ψέματα

∴ H υπόθεση είναι εσφαλμένη

∴ Άρα ο K λέει ψέματα

…

Ο Γρίφος των Λασπωμένων Παιδιών

Ένας πατέρας λέει στα παιδιά του, ένα αγόρι και ένα κορίτσι, να παίξουν στην αυλή χωρίς να λερωθούν. Ωστόσο, τα παιδιά καθώς παίζουν λερώνονται με λάσπες στο μέτωπό τους. Όταν ο πατέρας τα βλέπει λέει «Τουλάχιστον ένα παιδί έχει λασπωμένο πρόσωπο» και ύστερα ζητά από τα παιδιά να απαντήσουν «ΝΑΙ» ή «ΌΧΙ» στην ερώτηση: «Μήπως γνωρίζεις αν το πρόσωπό σου είναι λασπωμένο;». Ο πατέρας κάνει την ερώτηση δύο φορές. Τι θα απαντήσουν τα παιδιά δεδομένου ότι μπορούν να δουν το πρόσωπο του άλλου αλλά όχι το δικό τους και επίσης είναι έντιμα ενώ απαντάνε ταυτόχρονα;

$s \rightarrow$ το αγόρι έχει λερωμένο πρόσωπο

$d \rightarrow$ το κορίτσι έχει λερωμένο πρόσωπο

Ποιος σκότωσε τον λόρδο Lordaton;

«Ο λόρδος Lordaton, το θύμα, σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι με ένα μπρούτζινο κηροπήγιο.»

«Είτε η λαίδη Lordaton είτε η υπηρέτρια Sara, ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου.»

«Αν η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε ο μπάτλερ σκότωσε το λόρδο Lordaton με μία μοιραία δόση στρυχνίνης.»

«Αν η λαίδη Lordaton ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σοφέρ σκότωσε τον λόρδο Lordaton.»

«Αν η μαγείρισσα δεν ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε η Sara δεν ήταν στο καθιστικό όταν διαπράχτηκε ο φόνος.»

«Αν η Sara ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σερβιτόρος σκότωσε το λόρδο Lordaton.»

Κάποιες Επιπλέον Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο δύο ρητών αριθμών είναι ρητός.
2. Να αποδειχθεί ότι αν ο x είναι άρρητος, τότε και ο $1/x$ είναι επίσης άρρητος.
3. Να αποδειχθεί ότι $m^2 = n^2$ αν και μόνο αν $m = n$ ή $m = -n$.
4. Να δείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού μέσου δύο θετικών πραγματικών αριθμών x και y.