ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αθροίσματα, Γινόμενα και Ασυμπτωτικές Εκτιμήσεις

Ο Εισοδηματίας

- Στο τηλεπαιχνίδι «Ο Εισοδηματίας» ο Αρναούτογλου για πρώτη φορά δίνει δύο επιλογές:
  - Να πάρεις 50.000 Ευρώ κάθε χρόνο για 20 χρόνια ή
  - Να πάρεις 750.000 Ευρώ εφάπαξ.
- Τι πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν γνωρίζει ότι το επιτόκιο (η απόδοση χρημάτων στην τράπεζα) είναι 3%;

Ο Εισοδηματίας

- Ο στόχος είναι να υπολογίσουμε τη σημερινή αξία (με επιτόκιο *p*) όλων των χρημάτων που θα πάρουμε στα επόμενα 20 χρόνια:
  - Την 2η χρονιά: $\dfrac{50.000}{1+p}$
  - …
  - Την 20η χρονιά: $\dfrac{50.000}{(1+p)^{19}}$
  - Άρα η συνολική αξία είναι: $\displaystyle\sum_{i=0}^{19} \frac{50.000}{(1+p)^{i}}$

Ο Εισοδηματίας (συνέχεια)

- Τι θα πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν του προτείνουν 50.000 ευρώ επ’άπειρον ή 2.000.000 ευρώ εφάπαξ;
  - Η συνολική αξία θα είναι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{50.000}{(1+p)^i}$$

Υπολογισμός Αθροίσματος

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απλά κάνοντας τις πράξεις (όχι στην περίπτωση απείρου αθροίσματος). Είναι όμως ασύμφορο (όχι μόνο για τον υπολογιστή αλλά και για εμάς)…

- Ο κλειστός τύπος ενός αθροίσματος μας επιτρέπει να βρίσκουμε άμεσα (σε ένα βήμα) την τιμή του αθροίσματος για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής άθροισης. Υπολογιστικά είναι καλύτερος αυτό ο τρόπος

Άθροισμα Γεωμετρικής Σειράς

$$S(k) = x^0 + x^1 + \cdots + x^k$$

$$-xS(k) = -x^1 - x^2 - \cdots - x^{k+1}$$

$$S(k) - xS(k) = 1 - x^{k+1} \Rightarrow S(k) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

Άθροισμα Απείρων Όρων Γεωμετρικής Σειράς

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{i=0}^{n} x^i =$$

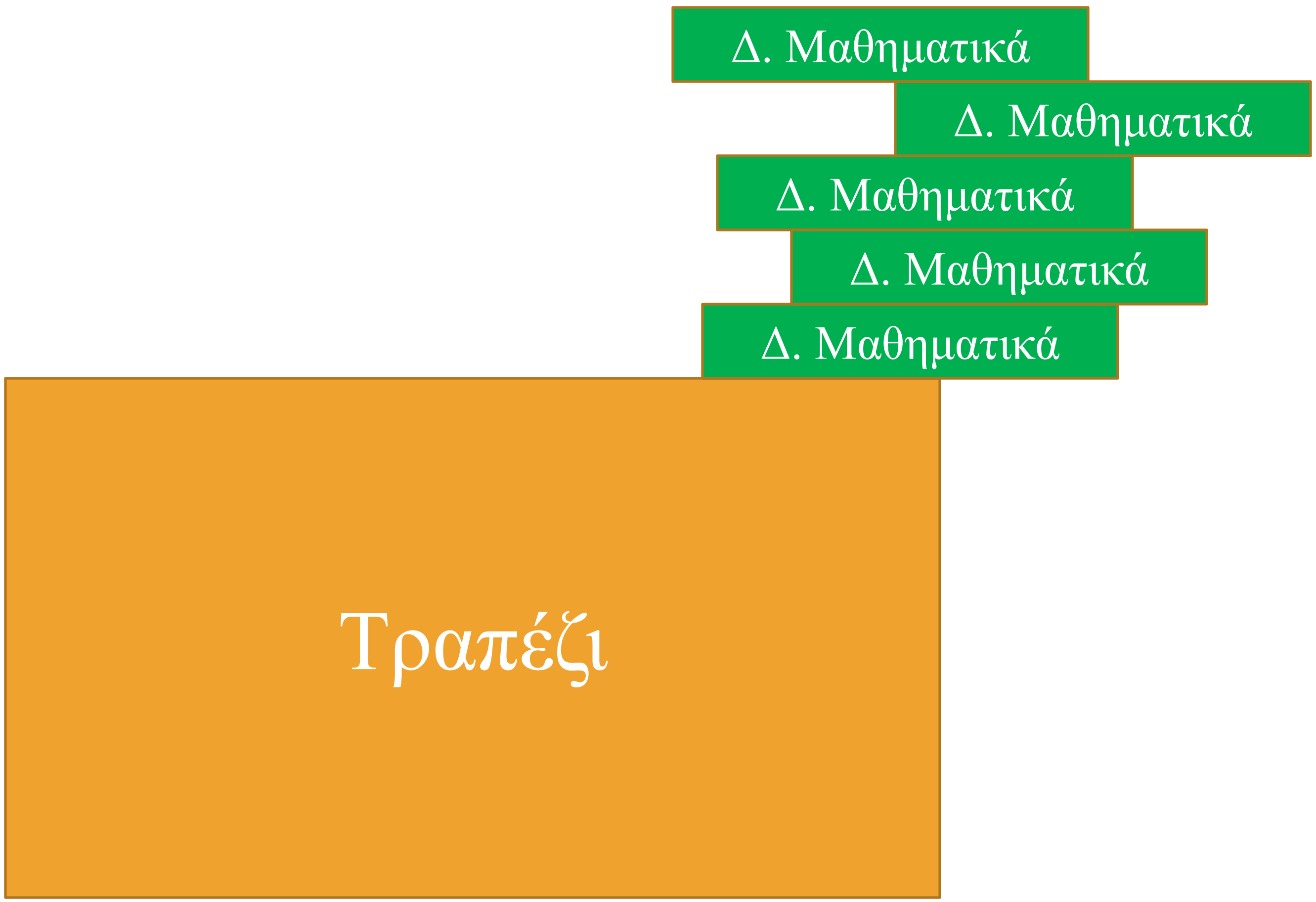
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, x<1$$

Ο Εισοδηματίας

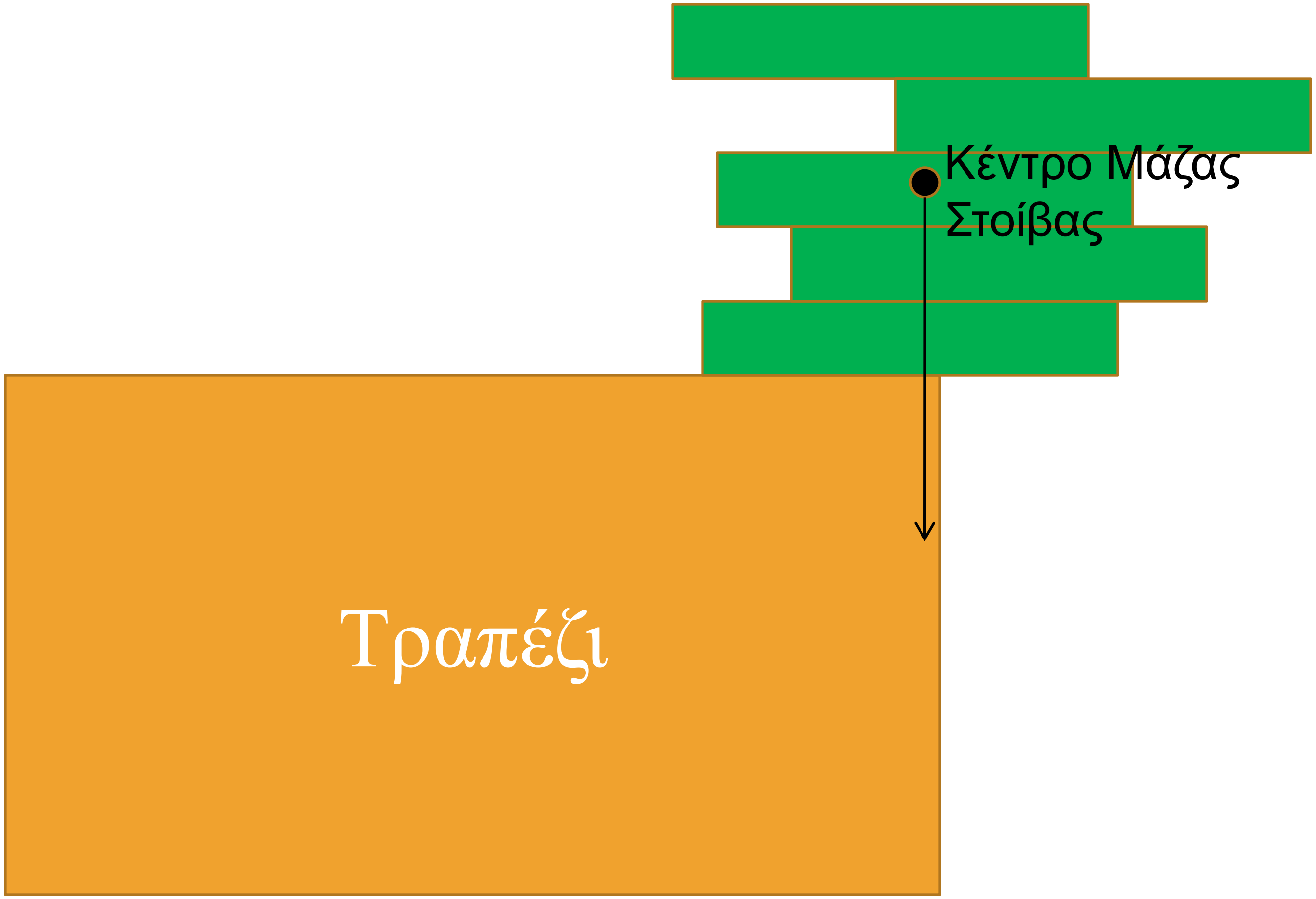
- Αν του δίνουν 50.000 Ευρώ για 20 χρόνια ή 750.000, τότε:
  - Σε σημερινή αξία θα είναι 766.190. Άρα καλύτερα να τα πάρεις.

- Αν σου δίνουν 50.000 Ευρώ για πάντα ή 2.000.000, τότε:
  - Σε σημερινή αξία θα είναι 1.716.667. Άρα πάρε τα 2.000.000.

Στοίβαγμα Βιβλίων

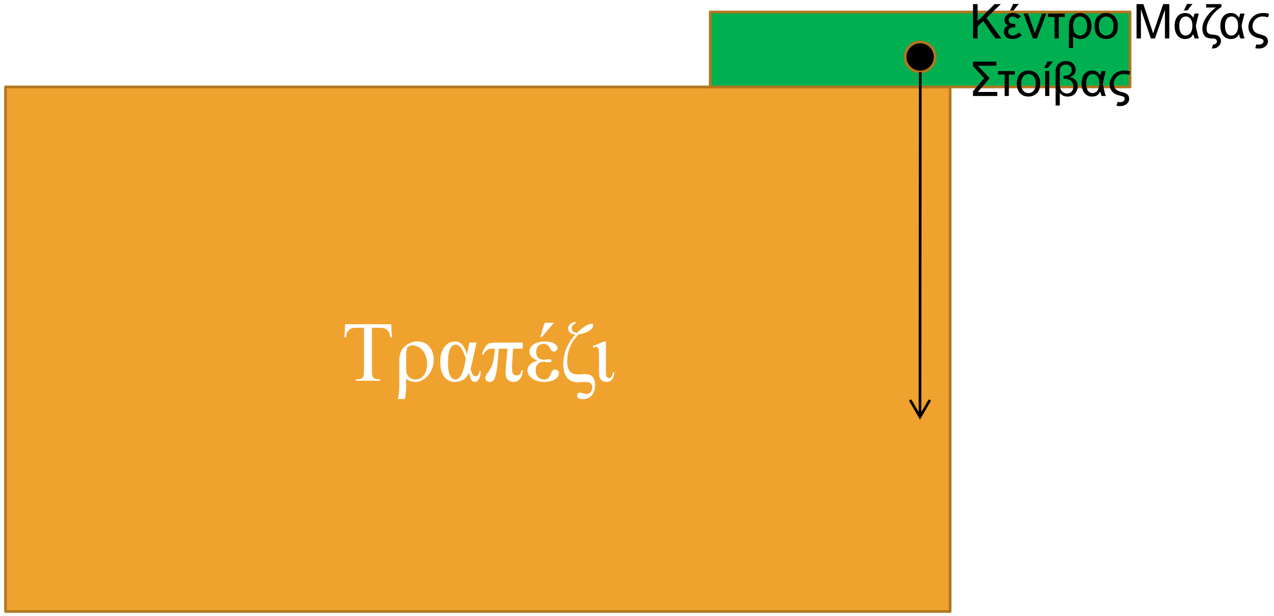


Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας



Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

Αν το κέντρο μάζας είναι εντός του τραπεζιού δεν πέφτει.

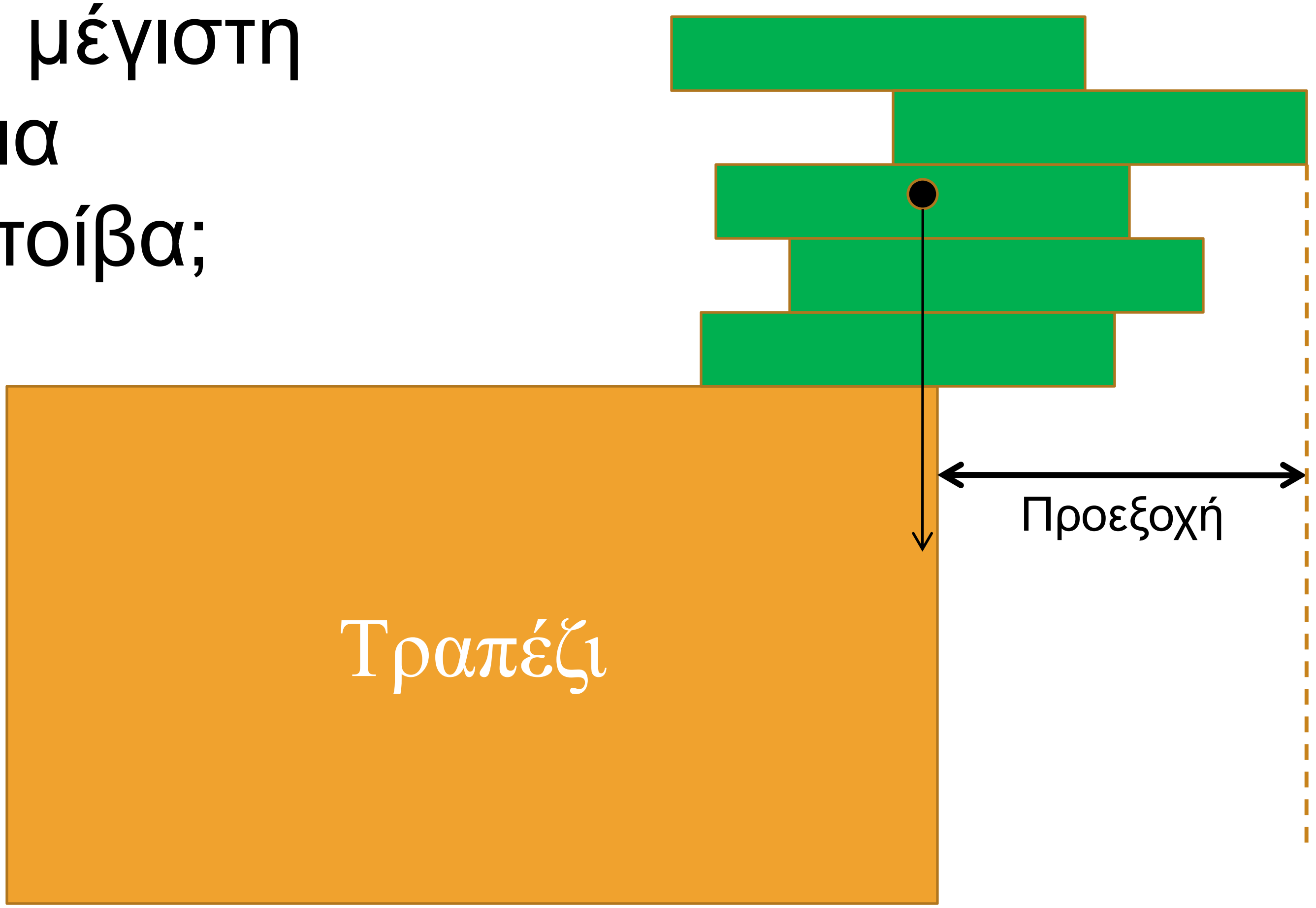


Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

Αν το κέντρο μάζας είναι εκτός του τραπεζιού τότε θα πέσει.

Στοίβαγμα Βιβλίων – Προεξοχή

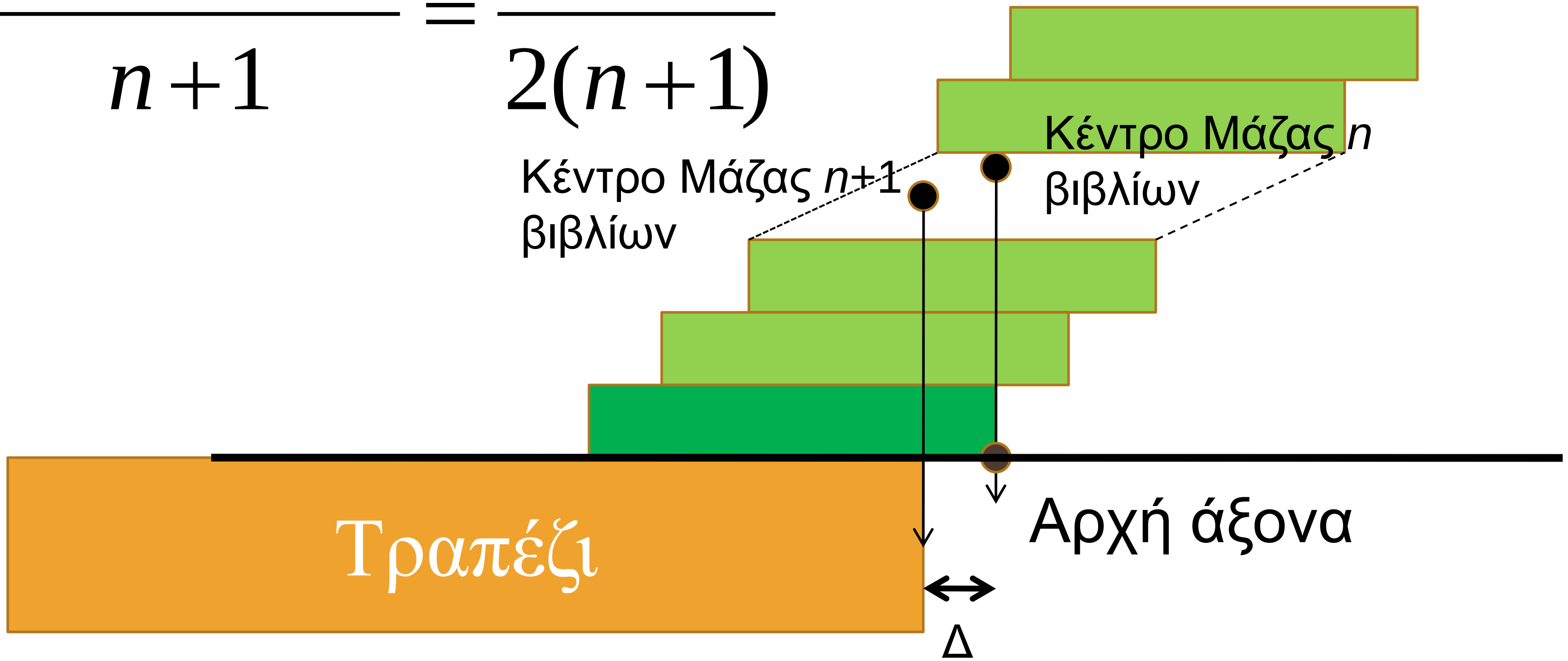
Ποια είναι η μέγιστη προεξοχή για ευσταθής στοίβα;



Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

- *Δ* = μεταβολή προεξοχής με την πρόσθεση ενός βιβλίου στα *n* βιβλία
- Συντεταγμένη κέντρου μάζας (*n*+1)-οστού βιβλίου είναι 1/2.

$$\Delta = \frac{0\cdot n + 1\cdot 1/2}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}$$



Αναδρομή
(Μία γεύση από το επόμενο μάθημα)

- Έστω B_n=προεξοχή n βιβλίων.

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$B_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

Αρμονικοί Αριθμοί

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

- H_n είναι ο n-οστός αρμονικός αριθμός
- Κλειστός τύπος;;;;;;

Βασικές Ιδιότητες Αθροισμάτων

$$\sum_{k\in K} ca_k = c\sum_{k\in K} a_k$$ Επιμεριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k\in K}(a_k + b_k) = \sum_{k\in K} a_k + \sum_{k\in K} b_k$$ Προσεταιριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k\in K} a_k = \sum_{p(k)\in K} a_{p(k)}$$ Μεταθετική Ιδιότητα

Παράδειγμα

Να βρεθεί το άθροισμα: $$S_n = \sum_{0\le k\le n}(a+bk)$$

Μεταθετική Ιδιότητα: $$S_n = \sum_{0\le n-k\le n}(a+bn-bk)$$

Πρόσθεση των δύο αθροισμάτων (προσεταιριστική): $$2S_n = \sum_{0\le k\le n}(2a+bn)$$

Επιμεριστική Ιδιότητα: $$S_n = \frac{1}{2}(2a+bn)(n+1)$$

Εξίσωση Αθροίσματος

- Ο στόχος είναι να φτάσουμε σε μία μορφή:

$$S_n = f(S_n)$$

Οπότε λύνουμε ως προς S_n και βρίσκουμε τον κλειστό τύπο

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le k \le n} a_{k+1}$$

Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{0 \le k \le n} a x^k$$

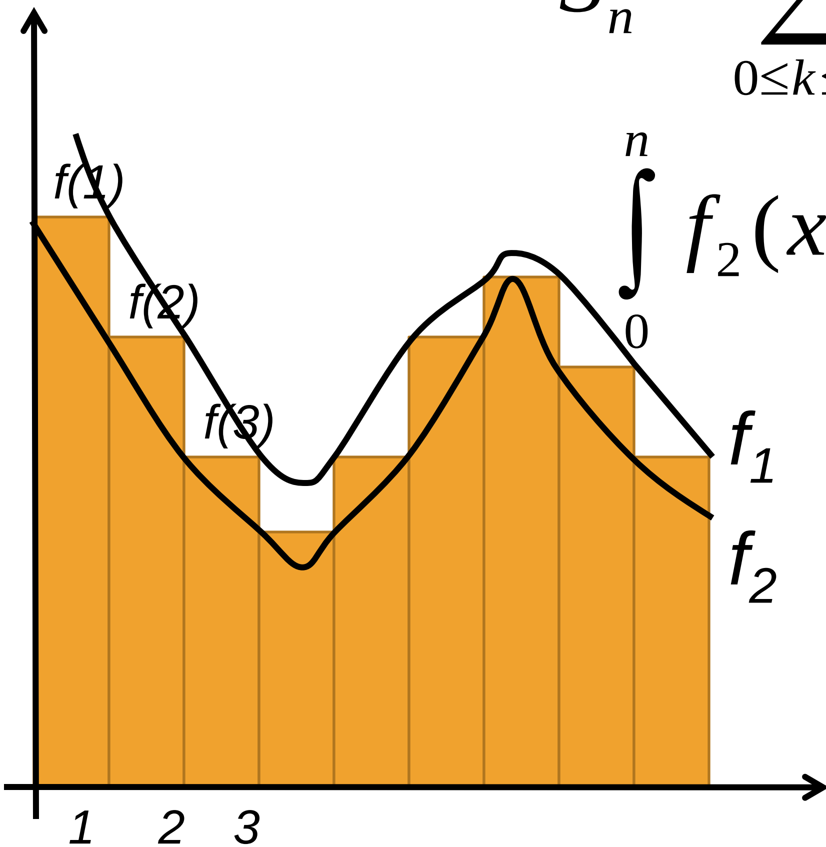
$$S_n + a x^{n+1} = a x^0 + x S_n$$

$$S_n = \frac{a - a x^{n+1}}{1 - x}$$

Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης

$$S_n = \sum_{0 \le k \le n} f(k)$$

$$\int_0^n f_2(x)dx \le \sum_{0 \le k \le n} f(k) \le \int_0^n f_1(x)dx$$



Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης

- Για αύξουσες συναρτήσεις:

$$\int_{x=a-1}^{b} f(x)dx \le \sum_{a\le k\le b} f(k) \le \int_{x=a}^{b+1} f(x)dx$$

- Για φθίνουσες συναρτήσεις:

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)dx \le \sum_{a\le k\le b} f(k) \le \int_{x=a-1}^{b} f(x)dx$$

Πίσω στην Στοίβα Βιβλίων

$$\int_{x=1}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq 1 + \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

Για *n* βιβλία η προεξοχή θα είναι τουλάχιστον ln(*n*+1)/2 μήκη βιβλίων συνολικά και (1+ln*n*)/2 το πολύ.

Για προεξοχή ίση με μήκος 10 βιβλίων χρειαζόμαστε τουλάχιστον 22026 βιβλία.

Παραγώγιση-Ολοκλήρωση Μεταβλήτων

Έστω δύο αθροίσματα S_n και P_n:

$$S_n(x) = a(x)\frac{dP_n(x)}{dx} \qquad S_n(x) = a(x)\int dP_n(x)dx$$

Αν γνωρίζουμε τον κλειστό τύπο για το P_n τότε μπορούμε να πάρουμε και τον κλειστό τύπο για το S_n.

Παράδειγμα

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} i x^i$$

Έστω: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i$

Τότε: $S_n(x) = x \frac{dP_n(x)}{dx}$

Πρόβλεψη και Απόδειξη με Επαγωγή

- Μαντεύουμε τον κλειστό τύπο
  - Μας δίνει κάποιος τον κλειστό τύπο
  - Τον μαντεύουμε από άλλα παρόμοια αθροίσματα που έχουμε δει
  - Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ολοκλήρωσης για να μαντέψουμε

- Αποδεικνύουμε με επαγωγή τον κλειστό τύπο

Παράδειγμα $\quad S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$

1. Προσεγγίζουμε με τη μέθοδο ολοκλήρωσης

$$\frac{n^3}{3} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

2. Θεωρούμε ότι η λύση είναι της μορφής $an^3+ bn^2+ cn+d$. Βάζοντας τιμές παίρνουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.

3. Αποδεικνύουμε με επαγωγή το αποτέλεσμα (αφού υπάρχει περίπτωση η πρόβλεψη να είναι λάθος). $a=1/3$, $b=1/2$, $c=1/6$, $d=0$.

Τηλεσκοπικές Σειρές

- Αθροίσματα στα οποία οι διαδοχικοί όροι που αθροίζονται αλληλοαναιρούνται:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i+1}-a_i\right)=$$

$$\left(a_2-a_1\right)+\left(a_3-a_2\right)+\cdots+\left(a_{n+1}-a_n\right)=$$

$$-a_1+\left(a_2-a_2\right)+\left(a_3-a_3\right)+\cdots+\left(a_n-a_n\right)+a_{n+1}=$$

$$a_{n+1}-a_1$$

Γινόμενα

- Τα γινόμενα τα χειριζόμαστε όπως τα αθροίσματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

- Έστω: $$P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

- Τότε: $$S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$$

Παράδειγμα $P_n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$

$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$$

- Από τη μέθοδο ολοκλήρωσης:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

Ο τύπος του Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$