# ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

# Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

| Κερδίζει | ΠΕΤΡΑ | ΨΑΛΙΔΙ | ΧΑΡΤΙ |
|---|---|---|---|
| ΠΕΤΡΑ | Ψ | Α | Ψ |
| ΨΑΛΙΔΙ | Ψ | Ψ | Α |
| ΧΑΡΤΙ | Α | Ψ | Ψ |

Η σχέση *Κερδίζει* αναπαρίσταται από το σύνολο {(Π,Ψ),(Ψ,Χ),(Χ,Π)}. (Εκεί που γίνεται αληθές δηλαδή)

# Σχέση (Relation)

***Σχέση*** (relation) *R* από το σύνολο *S* στο σύνολο *T*:

Ένα υποσύνολο του $S \times T$

$$R \subseteq S \times T \,,\; (s,t) \in R \,,$$

το στοιχείο *s* ***σχετίζεται με το*** στοιχείο *t*

$$sRt$$

Αν $S = T$, οπότε $R \subseteq S^2$ : Σχέση στο σύνολο *S*

# Πίνακας Σχέσης

$R$ σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα

***Πίνακας της σχέσης:*** ορθογώνιος πίνακας

με στοιχεία:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \alpha\nu \quad\quad s_i R t_j,\ (s_i, t_j) \in R \\ 0 \quad \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

# Παράδειγμα

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$R = \{(s_1, t_2), (s_2, t_1), (s_2, t_2), (s_2, t_5), (s_4, t_1), (s_4, t_4), (s_4, t_5)\} \subseteq S \times T \text{ .}$$

Πίνακας της σχέσης:

$$\begin{array}{cc|ccccc} & & & & T & & \\ & R & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\ \hline & s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S & s_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & s_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

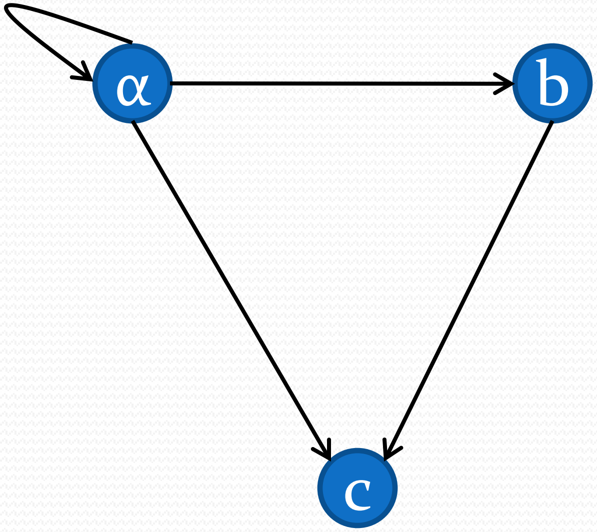
# Παράσταση Σχέσεων με χρήση Κατευθυνόμενων Γραφημάτων

Έστω R⊆C×C.

- Η κορυφές αντιστοιχούν στα στοιχεία του συνόλου C
- Οι κατευθυνόμενες ακμές αντιστοιχούν σε ζευγάρια της R.

$$S = \{a, b, c\}$$

$$R_8 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$$



# Παράδειγμα (Διάταξη < και ≤)

$$n < m \Leftrightarrow m - n \in \mathbf{N}$$

$$< \; = \{(n,m) : n, m \in \mathbf{Z}, \;\; m - n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{Z}^2$$

$$\leq \; = \{(n,m) : n, m \in \mathbf{Z}, \;\; m - n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \subseteq \mathbf{Z}^2$$

(α) $n \leq n$ *ανακλαστική*

(β) $n \leq m \,,\; m \leq n \;\Rightarrow\; n = m$ *αντισυμμετρική*

(γ) $n \leq m \,,\;\; m \leq p \Rightarrow \; n \leq p$ *μεταβατική*

# Ανακλαστικότητα

$R$ σχέση στο σύνολο $S$

*Ανακλαστική* (reflexive) σχέση:

Για κάθε $x \in S$, ισχύει $(x, x) \in R$

Ισοδύναμα: $xRx$.

*Μη-ανακλαστική* (irreflexive) σχέση:

Για κάθε $x \in S$, ισχύει $(x, x) \notin R$

# Παράδειγμα

$$S = \{a, b, c\}$$

- Ανακλαστική αλλά όχι μη-ανακλαστική:

$$\mathrm{R}_1 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$$

- Ούτε ανακλαστική ούτε μη-ανακλαστική:

$$R_2 = \{(a,a),(b,c),(c,c)\}$$

- Μη-ανακλαστική:

$$R_3 = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$$

# Συμμετρικότητα

*R* σχέση στο σύνολο *S*.

Σχέση <u>***συμμετρική*** (symmetric)</u>:

Η παρουσία του $(x, y)$ στο *R* συνεπάγεται και την παρουσία του $(y, x)$ στο *R*, για κάθε $x, y \in \mathrm{R}$.

$$(x, y) \in \mathrm{R} \Rightarrow (y, x) \in R \text{ ή } xRy \Rightarrow yRx$$

# Αντισυμμετρικότητα

Σχέση $R$ ***αντισυμμετρική*** (antisymmetric):

Η ταυτόχρονη παρουσία των $(x, y)$ και $(y, x)$ στο $R$, συνεπάγεται την ισότητα των $x$ και $y$ για κάθε $x, y \in R$.

$$(x, y) \in R \text{ και } (y, x) \in R \Rightarrow x = y$$

$$\text{ή} \quad xRy \text{ και } yRx \Rightarrow x = y$$

# Παραδείγματα

$S=\{a,b,c\}$

Σχέσεις:

- $R4=\{(a,a),(b,c),(c,b)\}$: συμμετρική
  όχι αντισυμμετρική
- $R5=\{(b,a),(a,c),(c,b)\}$: αντισυμμετρική
  όχι συμμετρική
- $R6=\{(a,a),(c,c)\}$: συμμετρική
  αντισυμμετρική
- $R7=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$: όχι συμμετρική
  όχι αντισυμμετρική

# Μεταβατικότητα

$R$ σχέση στο σύνολο $S$

Σχέση ***μεταβατική*** (transitive):

Η ταυτόχρονη παρουσία των $(x, y)$ και $(y, z)$ στο $R$ συνεπάγεται την παρουσία του $(x, z)$ στο $R$ για κάθε $x, y, z \in R$.

$$(x, y) \in R \text{ και } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

$$xRy \text{ και } yRz \Rightarrow xRz$$

# Παράδειγμα – 1

$$S = \{a, b, c\}$$

$$R_8 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

- Μεταβατική σχέση
- Από τον πίνακα της σχέσης

$$r_{ij} = r_{jk} = 1 \Rightarrow r_{ik} = 1$$

# Παράδειγμα – 2

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

| $R$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 1 | 1 | 0 | 1 |

# Παράδειγμα – 2

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

| $R$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $x_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 1 | 1 | 0 | 1 |

- Ανακλαστική
  - ΝΑΙ
- Συμμετρική
  - ΝΑΙ
- Μεταβατική
  - ΟΧΙ

$r_{24} = 1, r_{41} = 1$

$r_{21} = 0$

# Παραδείγματα

**Ανακλαστική**
**Συμμετρική**
**αΝτισυμμετρική**
**Μεταβατική**

$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$ **Α Ν Μ**

$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$ **Ν Μ**

$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ή } a = -b\}$ **Α Σ Μ**

$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$ **Α Σ Ν Μ**

$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$ **Ν**

$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$ **Σ**

# Σύνθεση Σχέσεων

Έστω $R$ σχέση από $A$ σε $B$ και έστω $S$ σχέση από $B$ σε $C$. Η ***σύνθεση*** των $R$ και $S$ ($R \circ S$), αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη $(a,c)$, $a \in A$, $c \in \mathrm{C}$, για τα οποία υπάρχει $b$ έτσι ώστε $(a,b) \in R$ και $(b,c) \in S$.

Παράδειγμα: A={1,2,3}, B={1,2,3,4} και C={0,1,2}

$R=\{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$

$S=\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$

$R \circ S=\{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}$

# Συνάρτηση

Η σχέση $f \subseteq S \times T$ ονομάζεται ***συνάρτηση*** (function):

- Για κάθε στοιχείο $s \in S$ υπάρχει ένα και μόνο στοιχείο $t \in T$ έτσι ώστε $(s,t) \in f$

Στα διατεταγμένα ζεύγη μιας συνάρτησης <u>το κάθε στοιχείο</u> του συνόλου $S$ εμφανίζεται <u>ακριβώς μία μόνο φορά</u>

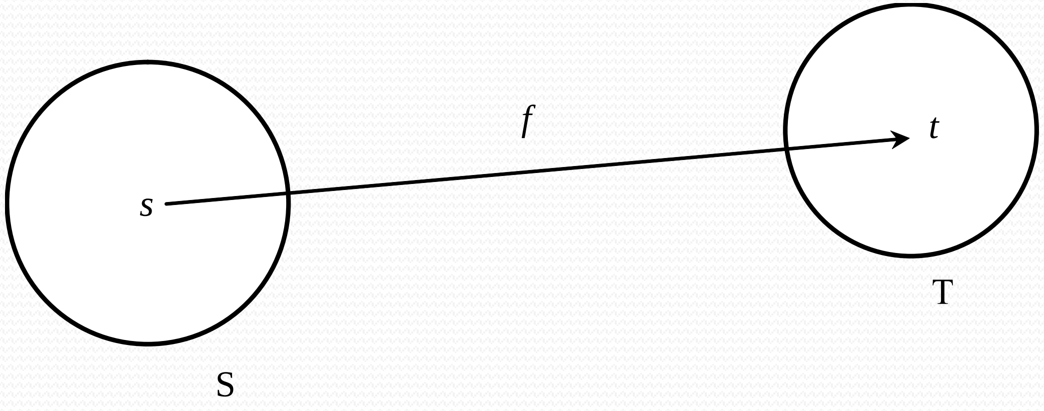
# Συμβολισμός

$$f : S \to T, \quad f(s) = t$$

$t$ ***εικόνα*** (image) του στοιχείου $s$ κάτω από τη συνάρτηση *f*.

*S* ***πεδίο ορισμού*** (domain)

*T* ***πεδίο τιμών*** (range)

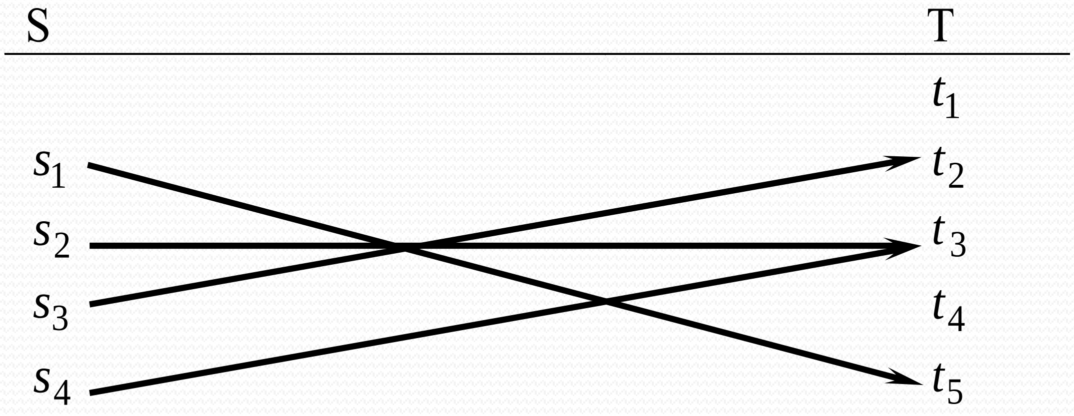


# Παράδειγμα

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$f = \{(s_1, t_5), (s_2, t_3), (s_3, t_2), (s_4, t_3)\} \subseteq S \times T$$



# Ορισμοί

Συνάρτηση ***επί*** (onto):

- Για κάθε $t \in T$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $s \in S$ έτσι ώστε $f(s) = t$

Συνάρτηση ***ένα προς ένα*** (one to one):

- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- δύο οποιαδήποτε στοιχεία του πεδίου ορισμού δεν έχουν την ίδια εικόνα

Αν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι πεπερασμένα σύνολα με τον ίδιο ακριβώς αριθμό στοιχείων, οι έννοιες "επί" και "ένα προς ένα" ταυτίζονται

# Ταυτοτική Συνάρτηση

$I_A$ ***ταυτοτική συνάρτηση*** στο σύνολο $A$:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A}}(a) = a$$

για κάθε

$$a \in A$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ένα προς ένα και επί

# Αντίστροφη Σχέση

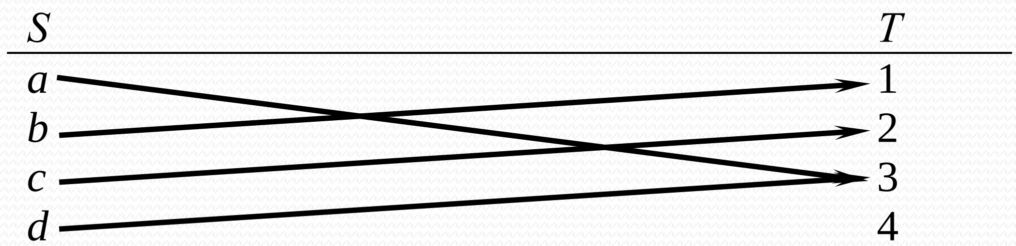
$R$ σχέση από το σύνολο $S$ στο σύνολο $T$

***Αντίστροφη*** (inverse) σχέση:

$$R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$$

Αν $R$ συμμετρική τότε $R^{-1}$=?

# Η *R* και *R*$^{-1}$ είναι συναρτήσεις;



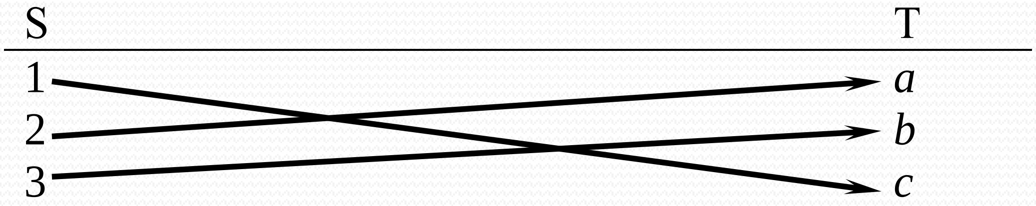

$$R = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$$

$$R^{-1} = \{(3, a), (1, b), (2, c), (3, d)\}$$

Παρόλο που η *R* είναι συνάρτηση, η $R^{-1}$ δεν είναι συνάρτηση
(το στοιχείο 4 του συνόλου *T* δεν εμφανίζεται σε κανένα ζεύγος αλλά και το στοιχείο 3 εμφανίζεται σε δύο ζεύγη)

# Η $R$ και $R^{-1}$ είναι συναρτήσεις;

Σχέση $R$




$$R = \{(1,c),(2,a),(3,b)\}$$

$$R^{-1} = \{(c,1),(a,2),(b,3)\}.$$

Και οι δύο είναι συναρτήσεις.

# Αντίστροφη Συνάρτησης

Η αντίστροφη σχέση μιας συνάρτησης *f* είναι και αυτή συνάρτηση αν και μόνο αν η *f* είναι ένα προς ένα και επί. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται η ***αντίστροφη συνάρτηση*** που συμβολίζεται με $f^{-1}$.

Ισχύει ότι $f^{-1}(f(x))=x$

# Ισότητα Συναρτήσεων

- Συναρτήσεις $f, g: S \to T$.
- Οι συναρτήσεις είναι ***ίσες*** $f = g$:

αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{S}$

# Σύνθεση Συναρτήσεων

Συναρτήσεις

$$f\!: S \to T \text{ και } g\!: T \to U$$

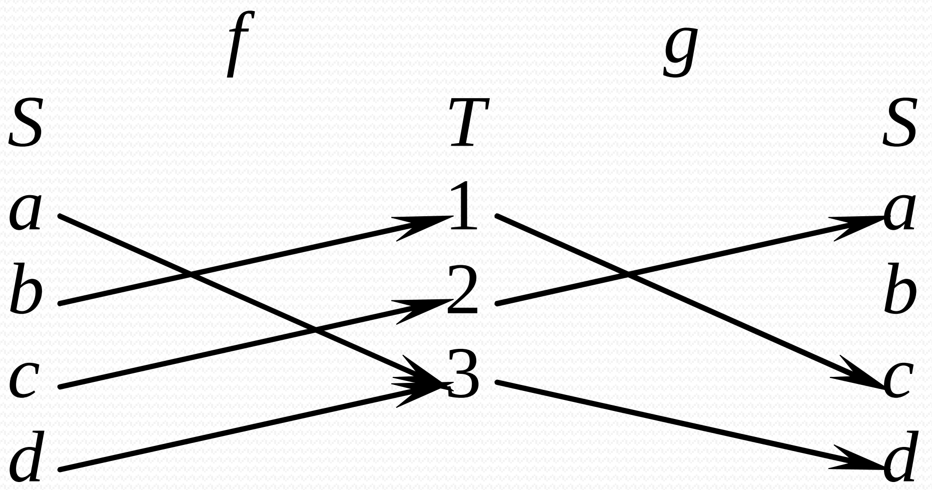
***Σύνθεση*** (composition): Μια νέα συνάρτηση

$g \circ f : S \to U$ για την οποία ισχύει:

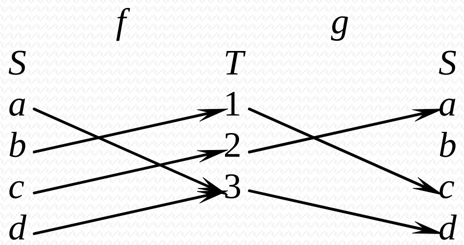
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in S$$

# Παράδειγμα

$$f : S \to T \qquad\qquad g : T \to S$$



# Παράδειγμα – Συνέχεια

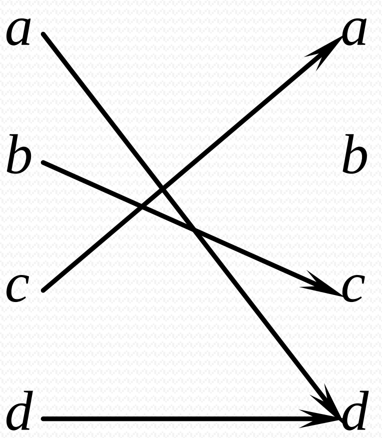



$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3) = d$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(1) = c$$

$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(2) = a$$

$$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(3) = d$$



# Σχέση Ισοδυναμίας

Θεωρούμε μία σχέση $R$ στο σύνολο $S$. Η $R$ είναι ***σχέση ισοδυναμίας*** (equivalence relation) (~) αν ισχύουν οι ιδιότητες:

(α) $a \sim a$ (ανακλαστική)

(β) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (συμμετρική)

(γ) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (μεταβατική)

για κάθε $a, b, c \in S$

# Παράδειγμα – 1

- Σχέση ~ στο Z ($n \in Z$, $n>1$):

$$a \sim b \iff a - b = kn,\ \ k \in Z$$

ή ισοδύναμα

$$a \sim b \iff a \equiv b \pmod{n}$$

- Δηλαδή: ο ακέραιος $a$ σχετίζεται με τον ακέραιο $b$ αν και μόνο αν η διαφορά τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $n$ ή αλλιώς αν το $b$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $a$ δια $n$

# Παράδειγμα – 1 (Συνέχεια)

- Σχέση ισοδυναμίας:
  - $a \sim a$ αφού $a - a = 0 \cdot n$
  - $a \sim b \Rightarrow a - b = \pi n \Rightarrow b - a = (-\pi)n \Rightarrow b \sim a$
  - $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a - b = pn$ και $b - c = qn$

    $\Rightarrow a - c = (a-b) + (b-c) = (p + q)n$

    $\Rightarrow a \sim c$

# Κλάση Ισοδυναμίας

- Σχέση ισοδυναμίας ~ σε σύνολο $S$
- Για κάθε $a \in S$, ***κλάση ισοδυναμίας*** (equivalence class) του $a$:
  - Το υποσύνολο των στοιχείων του $S$ με τα οποία το $a$ σχετίζεται (είναι ισοδύναμα του $a$)
- Συμβολισμός: $[a] = \{x: \alpha \sim x\}$
- Ισχύει:

$$[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b$$

# Θεώρημα

*Αν $\sim$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας σε σύνολο $S$, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζονται στο $S$ αποτελεί διαμέριση του $S$.*

# Παράδειγμα

$$a \equiv b \bmod n$$

- $n = 2$: Η διαφορά  διαιρείται με το 2
- Είτε και οι δύο ακέραιοι είναι άρτιοι είτε και οι δύο είναι περιττοί
- Δύο κλάσεις ισοδυναμίας (διαμέριση **Z**):
  - [0] = {..., -4, -2, 0, 2, 4,...}
  - [1] = {..., -5, -3, -1, 1, 3, 5,...}
- Ισχύει [2] = [0], [3] = [1],  [5] = [1],….
- κλάση [0]: όλοι οι άρτιοι αριθμοί,
- κλάση [1]: όλοι οι περιττοί αριθμοί

# Παράδειγμα

$$a \equiv b \bmod n$$

- Για $n$ = 4, έχουμε 4 κλάσεις ισοδυναμίας:

$$[0] = \{0,\ 0 \pm 1 \times 4,\ 0 \pm 2 \times 4,\ 0 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots.\}$$

$$[1] = \{1,\ 1 \pm 1 \times 4,\ 1 \pm 2 \times 4,\ 1 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots.\}$$

$$[2] = \{2,\ 2 \pm 1 \times 4,\ 2 \pm 2 \times 4,\ 2 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -10,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14, \ldots\}$$

$$[3] = \{3,\ 3 \pm 1 \times 4,\ 3 \pm 2 \times 4,\ 3 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -9,\ -5,\ -1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots\}$$

# Αριθμητική

- Για n=8 έχουμε 8 κλάσεις ισοδυναμίας.
- Η πράξη [11-6]=[11+10] =[21]=[2*8+5]=[5]