ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 3/2/2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά – **Ομάδα Α**

1. (30 μονάδες) α) (10) Να απαντήσετε με αιτιολόγηση στις παρακάτω ερωτήσεις: α) Μπορεί ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα να έχει περιττό πλήθος κόμβων περιττού βαθμού; β) Πόσες συνδεδεμένες συνιστώσες έχει το συμπληρωματικό γράφημα του πλήρους διμερούς γραφήματος $K_{m,n}$ και ποιες είναι αυτές; γ) Είναι δυνατόν σε μία ομάδα 9 ατόμων κάθε άτομο να έχει φίλους 5 μόνο άλλα άτομα; δ) Υπάρχουν κάποιοι άνδρες και 15 γυναίκες σε ένα δωμάτιο. Κάθε άνδρας κάνει χειραψία με 8 ακριβώς γυναίκες ενώ κάθε γυναίκα με 8 ακριβώς άνδρες. Πόσοι άνδρες υπάρχουν στο δωμάτιο;

β) (10) Να δείξετε ότι ο ισομορφισμός γραφημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

γ) (10) Να αποδείξετε ότι αν ένα επίπεδο συνδεδεμένο γράφημα $G=(V,E)$, όπου $e=|E|$ και $v=|V|$, δεν έχει απλό κύκλο (κύκλος που δεν επαναλαμβάνονται οι κορυφές) μήκους 3 ή 4, ισχύει ότι: $3e \leq 5v - 10$

2. (20 μονάδες) Έστω τα κατηγορήματα $P(x,y)$ = «υπάρχει ακμή από την κορυφή x στην κορυφή y στο ***κατευθυνόμενο*** γράφημα», $A(x)$ = «η κορυφή x είναι άσπρη» και $M(x)$ = «η κορυφή x είναι μπλε».

1. **(5)** Χρησιμοποιώντας τα $A(x)$ και $M(x)$ δώστε έναν λογικό τύπο φ_1 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική, δηλαδή έχει ένα και μόνο ένα χρώμα».

2. **(7)** Χρησιμοποιώντας τα $P(x,y)$, $A(x)$ και $M(x)$ δώστε ένα τύπο φ_2 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και γειτονεύει (συνδέεται μέσω ακμής) με κορυφές διαφορετικού χρώματος από αυτή».

3. **(5)** Όπως στο ερώτημα 2, δώστε ένα τύπο φ_3 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και κάθε απομονωμένη κορυφή του γραφήματος είναι μπλε».

4. **(3)** Δώστε κατευθυνόμενο γράφημα με 6 κορυφές που να επαληθεύει τους λογικούς τύπους φ_2 και φ_3.

3. (40 μονάδες) α) **(8)** Στα παρακάτω ερωτήματα δεν χρειάζεται να δώσετε αριθμητικό αποτέλεσμα. Ο τύπος με την κατάλληλη αιτιολόγηση είναι αρκετά.

1. **(2)** Πόσες είναι οι δυνατές απαντήσεις που μπορεί να δώσει ένας φοιτητής στην πρόοδο όταν υπάρχουν 10 ερωτήματα με 4 προτάσεις το καθένα όπου κάθε πρόταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως «Σωστή» (Σ), «Λάθος» (Λ) ή να μην την χαρακτηρίσει καθόλου;

2. **(2)** Ένας φοιτητής υποψιάζεται ότι οι μισές από τις 40 προτάσεις συνολικά είναι σωστές και οι άλλες μισές λάθος. Πόσες είναι οι δυνατές απαντήσεις που μπορεί να δώσει;

3. **(4)** Ένας άλλος φοιτητής υποψιάζεται το ίδιο όπως ο φοιτητής στο προηγούμενο υποερώτημα (α.2) αλλά επιπλέον θεωρεί ότι τα ερωτήματα που έχουν και τις 4 προτάσεις σωστές είναι <u>ακριβώς</u> 4. Πόσες δυνατές απαντήσεις μπορεί να δώσει.

β) **(10)** Να αποδείξετε συνδυαστικά τον εξής τύπο: $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

γ) **(8)** Πόσες ακολουθίες από n ψηφία στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης υπάρχουν στις οποίες εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά τα ψηφία 1, 2 και 3;

δ) **(5)** Έχουμε 100 μονόλεπτα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα κατανείμουμε σε 5 διαφορετικούς ανθρώπους (υπάρχει περίπτωση κάποιος να μην πάρει κανένα μονόλεπτο); Με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε αυτά τα 100 μονόλεπτα αν κάθε ένας πάρει τουλάχιστον 5 μονόλεπτα;

ε) **(4)** Αν επιλέγουμε τυχαία θετικούς ακεραίους, ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος τέτοιων ακεραίων που πρέπει να επιλέξουμε ώστε να εγγυηθούμε ότι για δύο από αυτούς τους αριθμούς a και b θα ισχύει $a \equiv b (mod\ 6)$.

στ) **(5)** Αν υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαχωρίσουμε μία τράπουλα με 52 φύλλα σε (δεν χρειάζεται να κάνετε αριθμητικούς υπολογισμούς):

1. 4 ομάδες ίδιου μεγέθους με ετικέτες Α, Β, Γ και Δ.
2. 4 ομάδες ίδιου μεγέθους χωρίς ετικέτες.

4. (15 μονάδες)

Να υπολογίσετε τα εξής αθροίσματα:

1. **(5)** $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2+2k}$
2. **(10)** $\sum_{k\geq 0} \frac{k-1}{2^k}$

5. (10 μονάδες) Να δείξετε ότι κάθε γινόμενο ακεραίων της μορφής $k(k+1)(k+2)$ διαιρείται από το 3.

Καλή Επιτυχία!!!

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ» - 3/2/2016

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά – **Ομάδα Β**

1. (40 μονάδες) α) **(8)** Στα παρακάτω ερωτήματα δεν χρειάζεται να δώσετε αριθμητικό αποτέλεσμα. Ο τύπος με την κατάλληλη αιτιολόγηση είναι αρκετά.

1. **(2)** Πόσες είναι οι δυνατές απαντήσεις που μπορεί να δώσει ένας φοιτητής στην πρόοδο όταν υπάρχουν 10 ερωτήματα με 4 προτάσεις το καθένα όπου κάθε πρόταση μπορεί να χαρακτηριστεί ως «Σωστή» (Σ), «Λάθος» (Λ) ή να μην την χαρακτηρίσει καθόλου;

2. **(2)** Ένας φοιτητής υποψιάζεται ότι οι μισές από τις 40 προτάσεις συνολικά είναι σωστές και οι άλλες μισές λάθος. Πόσες είναι οι δυνατές απαντήσεις που μπορεί να δώσει;

3. **(4)** Ένας άλλος φοιτητής υποψιάζεται το ίδιο όπως ο φοιτητής στο προηγούμενο υποερώτημα (α.2) αλλά επιπλέον θεωρεί ότι τα ερωτήματα που έχουν και τις 4 προτάσεις σωστές είναι <u>ακριβώς</u> 4. Πόσες δυνατές απαντήσεις μπορεί να δώσει.

β) **(10)** Να αποδείξετε συνδυαστικά τον εξής τύπο: $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$

γ) **(8)** Πόσες ακολουθίες από n ψηφία στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης υπάρχουν στις οποίες εμφανίζονται τουλάχιστον μία φορά τα ψηφία 7, 8 και 9;

δ) **(5)** Έχουμε 100 μονόλεπτα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τα κατανείμουμε σε 6 διαφορετικούς ανθρώπους (υπάρχει περίπτωση κάποιος να μην πάρει κανένα μονόλεπτο); Με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανείμουμε αυτά τα 100 μονόλεπτα αν κάθε ένας πάρει τουλάχιστον 5 μονόλεπτα;

ε) **(4)** Αν επιλέγουμε τυχαία θετικούς ακεραίους, ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος τέτοιων ακεραίων που πρέπει να επιλέξουμε ώστε να εγγυηθούμε ότι για δύο από αυτούς τους αριθμούς a και b θα ισχύει $a \equiv b (mod\ 7)$.

στ) **(5)** Αν υπολογίσετε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να διαχωρίσουμε μία τράπουλα με 52 φύλλα σε (δεν χρειάζεται να κάνετε αριθμητικούς υπολογισμούς):

1. 4 ομάδες ίδιου μεγέθους με ετικέτες A, B, C και D.
2. 4 ομάδες ίδιου μεγέθους χωρίς ετικέτες.

2. (15 μονάδες)

Να υπολογίσετε τα εξής αθροίσματα:

1. **(5)** $\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2+2k}$
2. **(10)** $\sum_{k\geq 0} \frac{k-1}{2^k}$

3. (30 μονάδες) α) (10) Να απαντήσετε με αιτιολόγηση στις παρακάτω ερωτήσεις: α) Μπορεί ένα απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα να έχει περιττό πλήθος κόμβων περιττού βαθμού; β) Πόσες συνδεδεμένες συνιστώσες έχει το συμπληρωματικό γράφημα του πλήρους διμερούς γραφήματος $K_{n,m}$ και ποιες είναι αυτές; γ) Είναι δυνατόν σε μία ομάδα 7 ατόμων κάθε άτομο να έχει φίλους 3 μόνο άλλα άτομα; δ) Υπάρχουν κάποιοι άνδρες και 15 γυναίκες σε ένα δωμάτιο. Κάθε άνδρας κάνει χειραψία με 6 ακριβώς γυναίκες ενώ κάθε γυναίκα με 8 ακριβώς άνδρες. Πόσοι άνδρες υπάρχουν στο δωμάτιο;

β) (10) Να δείξετε ότι ο ισομορφισμός γραφημάτων είναι σχέση ισοδυναμίας.

γ) (10) Να αποδείξετε ότι αν ένα επίπεδο συνδεδεμένο γράφημα $G=(V,E)$, όπου $e=|E|$ και $v=|V|$, δεν έχει απλό κύκλο (κύκλος που δεν επαναλαμβάνονται οι κορυφές) μήκους 3 ή 4, ισχύει ότι: $3e \leq 5v - 10$

4. (20 μονάδες) Έστω τα κατηγορήματα $P(u,v)$ = «υπάρχει ακμή από την κορυφή u στην κορυφή v στο ***κατευθυνόμενο*** γράφημα», $A(u)$ = «η κορυφή u είναι άσπρη» και $M(u)$ = «η κορυφή u είναι μπλε».

1. **(5)** Χρησιμοποιώντας τα $A(u)$ και $M(u)$ δώστε έναν λογικό τύπο ψ_1 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική, δηλαδή έχει ένα και μόνο ένα χρώμα».

2. **(7)** Χρησιμοποιώντας τα $P(u,v)$, $A(u)$ και $M(u)$ δώστε ένα τύπο ψ_2 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και γειτονεύει (συνδέεται μέσω ακμής) με κορυφές διαφορετικού χρώματος από αυτή».

3. **(5)** Όπως στο ερώτημα 2, δώστε ένα τύπο ψ_3 που να δηλώνει «κάθε κορυφή είναι μονοχρωματική και κάθε απομονωμένη κορυφή του γραφήματος είναι μπλε».

4. **(3)** Δώστε κατευθυνόμενο γράφημα με 6 κορυφές που να επαληθεύει τους λογικούς τύπους ψ_2 και ψ_3.

5. (10 μονάδες) Να δείξετε ότι κάθε γινόμενο ακεραίων της μορφής $k(k+1)(k+2)$ διαιρείται από το 3.

Καλή Επιτυχία!!!

<u>Λύσεις</u>

(Οι λύσεις είναι ενδεικτικές)

1(Α) – 3(Β)

α)

α) Όχι. Από εφαρμογή του θεωρήματος χειραψιών και διαχωρισμό σε κορυφές άρτιου και περιττού βαθμού.

β) **(Α)** Έχει 2 συνδεδεμένες συνιστώσες και μάλιστα αυτές είναι κλίκες και αντιστοιχούν στις δύο ομάδες κόμβων του $K_{m,n}$, δηλαδή η κλίκα K_m και η κλίκα K_n. **(Β)** Έχει 2 συνδεδεμένες συνιστώσες και μάλιστα αυτές είναι κλίκες και αντιστοιχούν στις δύο ομάδες κόμβων του $K_{n,m}$, δηλαδή η κλίκα K_n και η κλίκα K_m.

γ) **(Α)** Όχι, μιας και τότε το άθροισμα των βαθμών στο αντίστοιχο γράφημα φιλίας θα ήταν 45 που είναι περιττός και άρα άτοπο. **(Β)** Όχι, μιας και τότε το άθροισμα των βαθμών στο αντίστοιχο γράφημα φιλίας θα ήταν 21 που είναι περιττός και άρα άτοπο.

δ) **(Α)** Έστω x. Τότε από το θεώρημα χειραψιών: $8x+15\cdot 8=2\cdot 8\cdot 15 \Rightarrow 8x=8\cdot 15 \Rightarrow x=15$ **(Β)** Έστω x. Τότε από το θεώρημα χειραψιών: $6x+15\cdot 8=2\cdot 8\cdot 15 \Rightarrow 6x=8\cdot 15 \Rightarrow x=20$

β) Το G είναι ισομορφικό προς τον εαυτό του και άρα είναι ανακλαστική. (G~G)

Έστω ότι το G είναι ισομορφικό προς το H. Τότε υπάρχει μία απεικόνιση ένα-προς-ένα f από το G στο H που διατηρεί την γειτονικότητα και την μη-γειτονικότητα. Άρα, η f^{-1} είναι ένα-προς-ένα απεικόνιση από το H στο G με τις ίδιες ιδιότητες. Άρα ο ισομορφισμός είναι συμμετρικός. ($G \sim H \Rightarrow H \sim G$)

Αν το G είναι ισομορφικό στο H και το H είναι ισομορφικό στο K μέσω των απεικονίσεων f και g τότε η απεικόνιση $f \circ g$ είναι ένα-προς-ένα απεικόνιση από το G στο K και άρα είναι ισόμορφα (G~H,H~K⇒G~K)

γ) Αφού κάθε απλός κύκλος έχει μήκος >4 σημαίνει ότι κάθε περιοχή θα ορίζεται από τουλάχιστον 5 ακμές. Αφού κάθε μία ακμή συμμετέχει σε το πολύ 2 περιοχές συνεπάγεται ότι $5R \leq 2e$, όπου R οι περιοχές. Από τον Euler έχουμε ότι $R=2+e-v$. Αντικαθιστώντας στην παραπάνω ανισότητα αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

2(Α) – 4(Β)

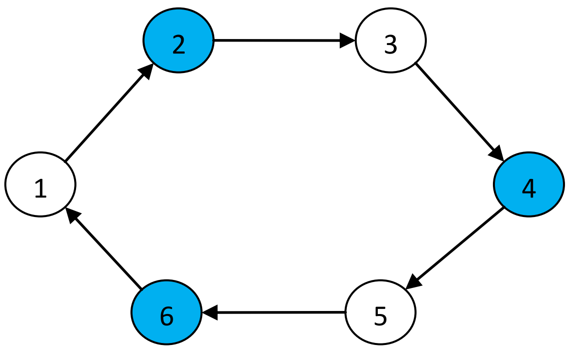
1. $\varphi_1 = \forall x\left(\left(M(x) \wedge \neg A(x)\right) \vee \left(\neg M(x) \wedge A(x)\right)\right)$

2. $\varphi_2 = \varphi_1 \wedge \forall x \forall y\left(P(x,y) \vee P(y,x)\right) \to \left(\left(A(x) \to M(y)\right) \wedge \left(M(x) \to A(y)\right)\right)$

3. $\varphi_3 = \varphi_1 \wedge \forall x\left(K(x) \to M(x)\right)$

όπου $K(x)$ = «η x είναι απομονωμένη» και $K(x) = \forall y\left(\neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)\right)$

4. Δεν έχουμε δώσει απομονωμένη κορυφή.



3(A) – 1(B)

α)1. Κάθε πρόταση μπορεί να χαρακτηρισθεί ως Σ, ως Λ ή να μην χαρακτηρισθεί. Αφού έχουμε 40 προτάσεις συνολικά και 3 επιλογές ανά πρόταση η απάντηση είναι 3^{40}.

2.Ο φοιτητής απλά μπορεί να επιλέξει τις 20 προτάσεις που θα χαρακτηρίσει ως Σ (και τις υπόλοιπες Λ). Άρα $\binom{40}{20}$.

3. Ο φοιτητής επιλέγει πρώτα τα 4 ερωτήματα που έχουν και τις 4 προτάσεις σωστές. Οι επιλογές είναι $\binom{10}{4}$. Άρα έχει δώσει 16 Σ. Απομένουν άλλα 4 Σ να κατανείμει σε 40-16=24 προτάσεις. Οι επιλογές είναι $\binom{24}{4}$. Όμως υπάρχουν κάποιες περιπτώσεις όπου και τα 4 Σ κατανέμονται στις 4 προτάσεις κάποιου από τα υπόλοιπα 6 ερωτήματα. Αυτό δεν θέλουμε να το μετρήσουμε μιας και πρέπει να έχουμε ακριβώς 4 ερωτήματα με Σ σε όλες τις προτάσεις. Υπάρχουν συνολικά 6 τρόποι να συμβεί αυτό. Άρα οι έγκυροι τρόποι είναι $\binom{24}{4} - 6$. Οι υπόλοιπες προτάσεις είναι Λ. Από το κανόνα του γινομένου έχουμε ότι ο συνολικός αριθμός απαντήσεων είναι $\binom{10}{4}\left(\binom{24}{4} - 6\right)$.

β) **(Στο Β όπου m βάλε k)** Το αριστερό μέρος μετρά το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών της μορφής (x,S), όπου S είναι ένα k-υποσύνολο του συνόλου $\{1,2,\ldots,n\}$ και $x \in S$. Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τρόποι επιλογής του S και k τρόποι επιλογής του x. Το δεξιό μέρος μετρά το ίδιο αλλά με άλλο τρόπο. Πρώτα επιλέγουμε το x από τα n στοιχεία με n τρόπους και έπειτα επιλέγουμε τα υπόλοιπα k-1 στοιχεία του S από τα εναπομείναντα n-1 με $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους.

γ) **(Στο Β αντί για 1, 2 και 3 έχουμε 7,8 και 9)** Έστω ότι με A_i αναπαριστούμε το σύνολο των ακολουθιών που δεν εμφανίζεται το ψηφίο i. Θα βρούμε το συμπληρωματικό του. Αυτό που ψάχνουμε είναι το πλήθος όλων των n-αδικών ακολουθιών μείον αυτές που δεν έχουν κάποιο από τα ψηφία 1 ή 2 ή 3. Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε το $10^n - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 10^n - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Έχουμε: $|A_i| = 9^n$, $|A_i \cap A_j| = 8^n$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 7^n$. Άρα η απάντηση είναι:

$$10^n - 3 \cdot 9^n + 3 \cdot 8^n - 7^n$$

δ) Φανταστείτε σαν ένα πρόβλημα δυαδικών ακολουθιών όπου θέλουμε να κατανείμουμε 100 μηδενικά σε 104 **(105)** θέσεις – οι 4 **(5)** θέσεις από άσους καθορίζει πόσα μονόλεπτα θα πάρει ο καθένας. Άρα η απάντηση για το πρώτο είναι: $\binom{104}{100}$. $\boldsymbol{\binom{105}{100}}$

Για τη δεύτερη ερώτηση, πρώτα δίνουμε 5 μονόλεπτα στον καθένα και κατανείμουμε με τον ίδιο τρόπο όπως και πριν τα υπόλοιπα 75 **(70)** μονόλεπτα. Αυτό μπορεί να γίνει με $\binom{79}{75}$ $\boldsymbol{\binom{75}{70}}$τρόπους.

ε) Για να είναι ισοδύναμοι mod 6 οι θετικοί ακέραιοι a και b θα πρέπει το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6 να είναι ίδιο. Υπάρχουν 6 δυνατές τιμές για το υπόλοιπο της διαίρεσης με το 6 (0, 1, 2, 3, 4, 5). Επομένως 7 αριθμοί θα πρέπει να επιλεγούν ώστε να εγγυηθούμε ότι δύο θα είναι ισοδύναμοι mod 6. **Για το Β με τον ίδιο τρόπο έχουμε ότι χρειαζόμαστε τουλάχιστον 8 αριθμούς.**

στ) 1. Κάθε ομάδα θα πρέπει να έχει 52/4=13 φύλλα. Για να επιλέξουμε την Α μπορούμε να το κάνουμε με $\binom{52}{13}$ τρόπους, τη Β με $\binom{39}{13}$, την Γ με $\binom{26}{13}$ και την Δ με $\binom{13}{13} = 1$ τρόπους. Άρα, από τον κανόνα του γινομένου έχουμε

$\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ τρόπους συνολικά.

2. Αφού δεν έχουν ετικέτες σημαίνει ότι από τον κανόνα της διαίρεσης μπορούμε απλά να διαιρέσουμε το αποτέλεσμα από το (1) υποερώτημα με το 4! και έχουμε το αποτέλεσμα που ζητάμε.

4(A) – 2(B)

1.

$$\frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Άρα (τηλεσκοπική σειρά):

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{102}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right]$$

2.

$$\sum_{k\geq 0} \frac{k-1}{2^k} = \sum_{k\geq 0} k\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Το πρώτο άθροισμα προκύπτει από τη μέθοδο της παραγώγισης μεταβλητής (δες σημειώσεις). Από εκεί προκύπτει το εξής:

$$\sum_{k\geq 0} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{2} - (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{k}{2}+1\right)}{\frac{1}{4}} = 2$$

$$\sum_{k\geq 0}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Άρα: $\sum_{k\geq 0} \frac{k-1}{2^k} = 2 - 2 = 0$

5(A, B)

Θα κάνουμε απόδειξη με περιπτώσεις. Αν k mod 3 = 0 τότε προφανώς η ποσότητα διαιρείται από το 3. Αν k mod 3 = 1, τότε διαιρείται το k+2 από το 3 μιας και σε αυτή τη περίπτωση k+2 mod 3 = 0 και άρα η ποσότητα πάλι διαιρείται. Τέλος, αν k mod 3 = 2 τότε το k+1 διαιρείται από το 3 και σε αυτή τη περίπτωση k+1 mod 3 = 0 και άρα η ποσότητα διαιρείται από το 3.