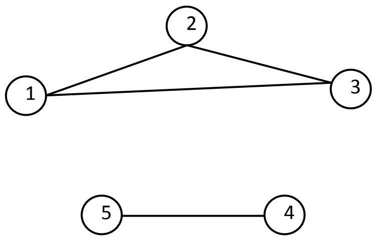
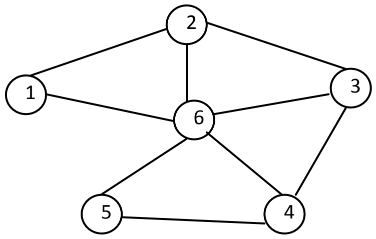
1. Σχεδίαση Γραφημάτων (4.8.1)

Να σχεδιαστούν τα γραφήματα G=(V,E)

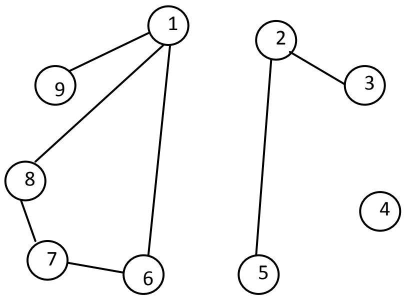
A) V={1,2,3,4,5} και E={{1,2},{1,3},{2,3},{4,5}}



B) V={1,2,3,4,5,6} και E={{1,2},{2,3},{1,6},{2,6},{3,6},{3,4},{4,6},{5,6},{4,5}}



Γ) V={1,2,3,4,5,6,7,8,9} και E={{2,3},{2,5},{1,9},{1,8},{1,6},{6,7},{7,8}}

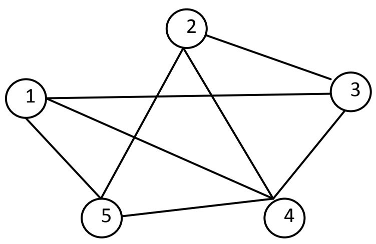


2. Σχεδίαση Γραφημάτων (4.8.2)

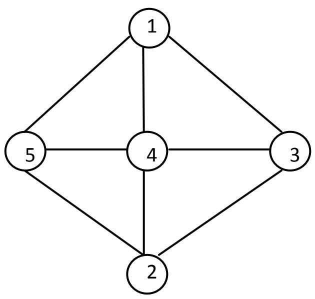
Να σχεδιαστούν τα γραφήματα που ορίζονται από τον πίνακα γειτνίασης.

A)

Κορυφές	1	2	3	4	5
1	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	1	1	0	1	0
4	1	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



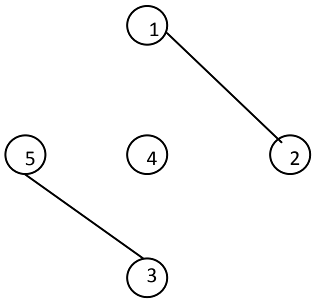
Επίπεδο γράφημα:



B) Να βρεθεί το συμπληρωματικό του.

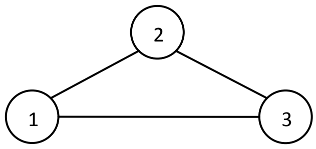
Στον πίνακα γειτνίασης αλλάζουμε τα μη διαγώνια στοιχεία από 0→1 και από 1→0.

Κορυφές	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0

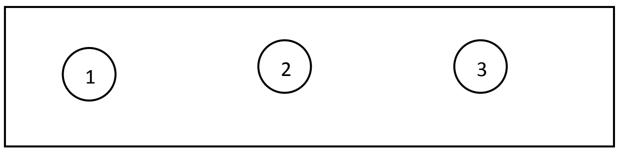


3. Σχεδίαση Γραφημάτων (4.8.4)

Να σχεδιαστούν όλα τα υπογραφήματα του K_3.

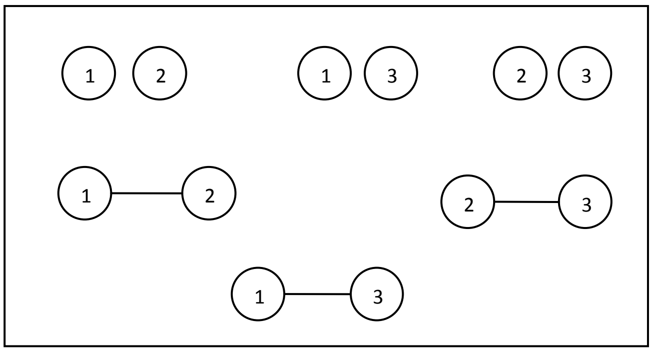


Με μία κορυφή, $2^0 \binom{3}{1} = 3$ υπογραφήματα:

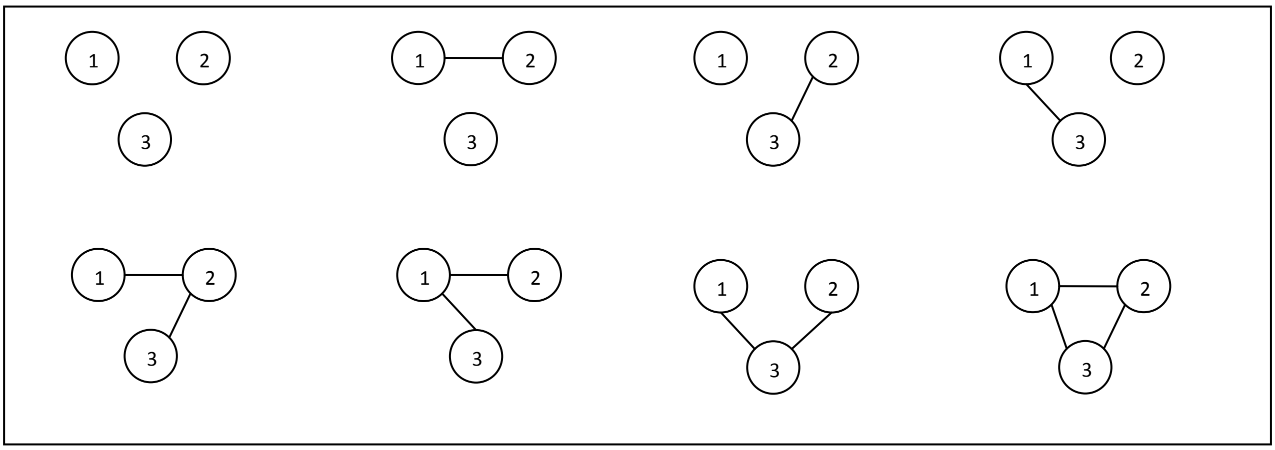


Δηλαδή 3 ξεχωριστά υπογραφήματα με μία κορυφή χωρίς ακμές.

Με δύο κορυφές, $2^1 \binom{3}{2} = 6$ υπογραφήματα:

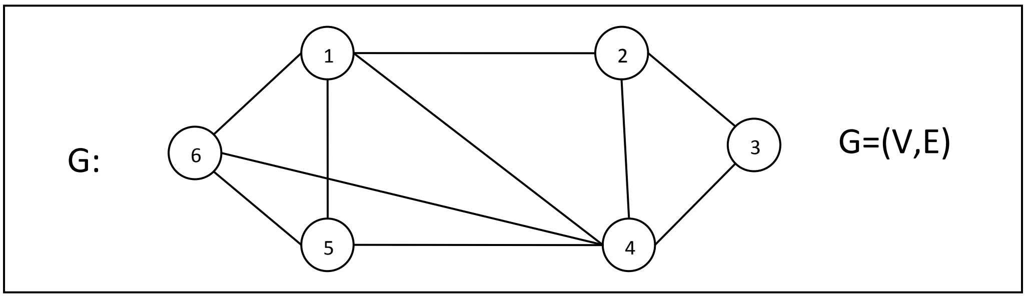


Με τρεις κορυφές, $2^3 \binom{3}{3} = 8$ υπογραφήματα



4. Πίνακας Αντιστοίχησης (4.8.12)

Να βρεθεί ο πίνακας αντιστοίχησης του γραφήματος αφού αριθμηθούν κατάλληλα οι κορυφές και οι ακμές του.



V={1,2,3,4,5,6}   E={{1,2},{1,4},{1,5},{1,6},{2,3},{2,4},{3,4},{4,5},{4,6},{5,6}}

Ο πίνακας αντιστοίχησης (6 x 10)

$$N_G = \left[n_{i,e}\right] \text{ όπου } i \in V, e \in E \text{ και } n_{i,e} = \begin{cases} 1 & i \in e \\ 0 & i \notin e \end{cases}$$

	{1,2}	{1,4}	{1,5}	{1,6}	{2,3}	{2,4}	{3,4}	{4,5}	{4,6}	{5,6}
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1

Παρατήρηση: Αν πάρουμε $N_G \cdot N_G^{'} = \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{5} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$ (το ΄ δηλώνει ανάστροφο)

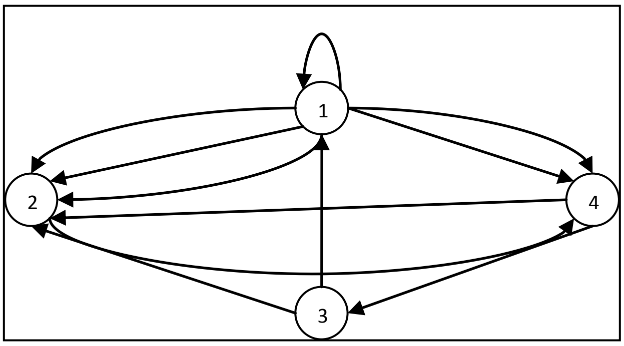
Στην διαγώνιο είναι οι βαθμοί της κάθε κορυφής.

5. Σχεδίαση Κατευθυνόμενων Γραφημάτων (4.8.13)

Να σχεδιασθεί το κατευθυνόμενο γράφημα που ορίζεται από τον εξής πίνακα γειτνίασης.

Κορυφές	1	2	3	4
1	1	3	0	2
2	0	0	0	1

3	1	1	0	0
4	0	1	1	0



6. Επιφέρον και Παράγον Γράφημα (4.8.9)

Δίνεται το γράφημα που ορίζεται από τον πίνακα:

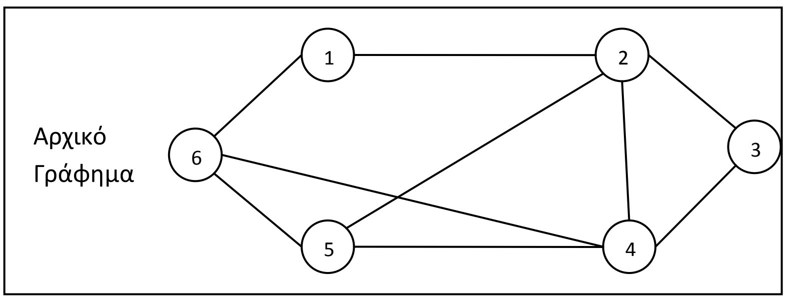
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0

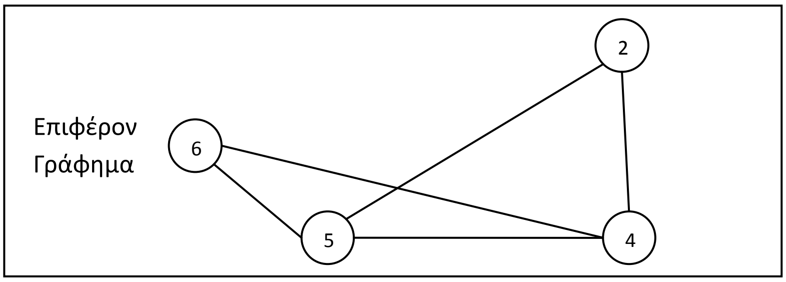
Να σχεδιαστεί και να δοθεί παράδειγμα για επιφέρον και παράγον υπογράφημα.

Θεωρούμε τις κορυφές $V' = \{2,4,5,6\}$. Αρκεί από τον αντίστοιχο πίνακα να διαγράψουμε τις γραμμές και στήλες 1 και 3.

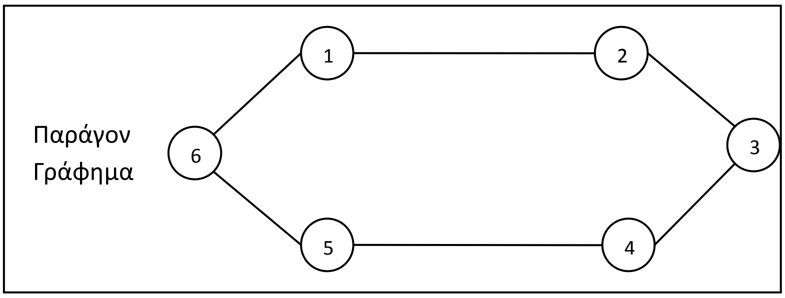
Άρα ο πίνακας που προκύπτει είναι:

0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	1
0	1	1	0

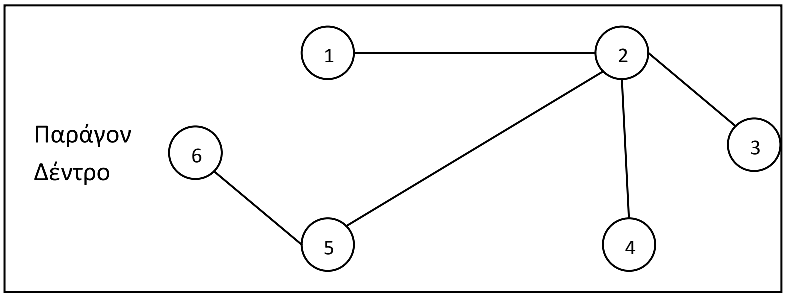




Παράγον γράφημα ($V' = V, G' \subseteq G$)



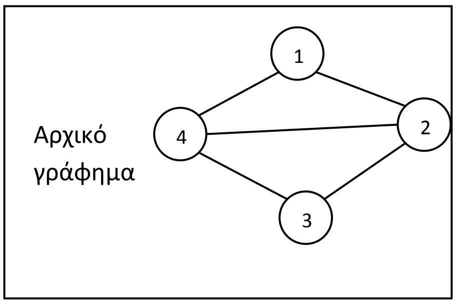
Παράγον δέντρο



7. Απαρίθμηση (4.8.3)

Δίνεται το γράφημα που ορίζεται από τον πίνακα:

0	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0



Πόσα υπογραφήματα μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Υποσύνολα του V (δεν υπολογίζουμε το ∅):

$\binom{4}{1} = 4$ με 1 στοιχείο

$\binom{4}{2} = 6$ με 2 στοιχεία

$\binom{4}{3} = 4$ με 3 στοιχεία

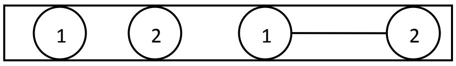
$\binom{4}{4} = 1$ με 1 στοιχείο

Συνολικά έχουμε 15 (2^4-1) υποσύνολα.

<u>Με 1 κορυφή</u>: 4 υπογραφήματα

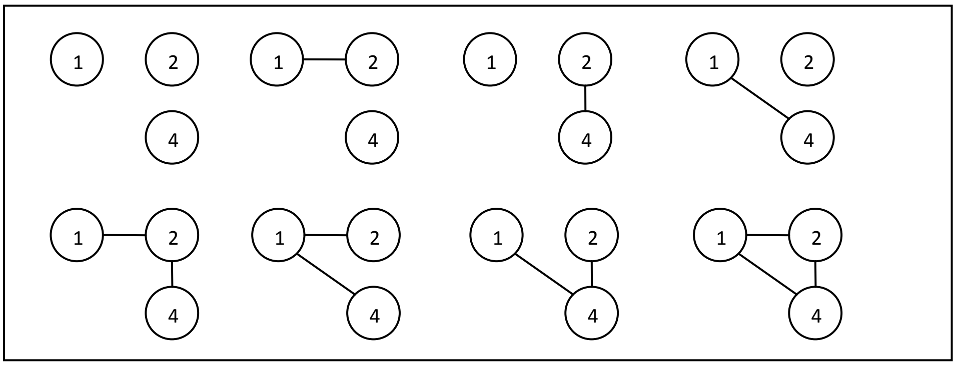
<u>Με 2 κορυφές</u>: Η ακμή {1,3} είναι η μόνη που δεν υπάρχει και άρα για τις κορυφές 1 και 3 υπαρχει μόνο ένα υπογράφημα. Για τα υπόλοιπα έχουμε δύο υπογραφήματα:

Για παράδειγμα:



Άρα $5 \cdot 2 + 1 = 11$ υπογραφήματα

<u>Με 3 κορυφές</u>: Αν πάρουμε τις 1,2,4 κορυφές που συνδέονται όλες μεταξύ τους, θέλουμε όλα τα υποσύνολα του {{1,2},{1,4},{2,4}} που είναι 2^3=8.



Παρόμοια για την τριάδα 2,3,4 έχουμε 8 υπογραφήματα.

Οι άλλες δύο τριάδες 1,2,3 και 1,3,4 δεν περιέχουν την ακμή {1,3} ως αρχική άρα θέλουμε όλα τα υποσύνολα του {{1,2},{2,3}} και του {{1,4},{3,4}} αντίστοιχα που είναι 4 και 4 αντίστοιχα.

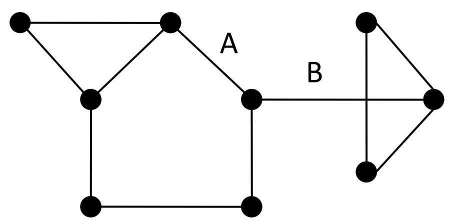
Άρα με 3 κορυφές: 8+8+4+4=24 υπογραφήματα.

<u>Με 4 κορυφές</u>: Εκτός από την {1,3} οι άλλες 5 ακμές μπορούν να εμφανίζονται στον πίνακα γειτνίασης με 0 ή 1 ή ισοδύναμα τα υποσύνολα του {{1,2},{1,4},{2,3},{2,4},{3,4}} είναι 2^5=32 υπογραφήματα.

Συνολικά 4+11+24+32=71 υπογραφήματα συνολικά.

8. Θεωρία Γραφημάτων

Μία ακμή σε ένα συνδεδεμένο γράφημα καλείται *ακμή αποκοπής* αν η απομάκρυνσή της μετατρέπει το γράφημα σε μη συνδεδεμένο.



B

A) Για το παραπάνω γράφημα, η A ή η B είναι ακμή αποκοπής και γιατί;

H B.

B) Αποδείξτε ότι σε ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα, μία ακμή e είναι ακμή αποκοπής αν και μόνο αν κανένας απλός κύκλος δεν περιέχει την e.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αν μία ακμή είναι κομμάτι ενός απλού κύκλου τότε δεν είναι ακμή αποκοπής και αν δεν περιέχεται σε έναν απλό κύκλο τότε είναι ακμή αποκοπής.

Αρχικά αποδεικνύουμε ότι αν η e περιέχεται σε ένα κύκλο τότε η e δεν είναι ακμή αποκοπής. Αφού το G είναι συνδεδεμένο υπάρχει μονοπάτι P μεταξύ κάθε ζευγαριού κόμβων u και v. Θα δείξουμε ότι θα υπάρχει ένα μονοπάτι μεταξύ u και v αφού η e διαγράφθηκε. Έστω $e,e_1,e_2,\ldots,e_n$ οι ακμές στον απλό κύκλο που περιέχει το e. Αφού ο κύκλος είναι απλός, καμία από τις ακμές $e_1,e_2,\ldots,e_n$ δεν θα είναι ίση με e. Επομένως, μπορούμε να φτιάξουμε ένα νέο μονοπάτι που συνδέει το u και v, αλλά δεν περιέχει την ακμή e αντικαθιστώντας είτε το $e_1,e_2,\ldots,e_n$ ή $e_n,e_{n-1},\ldots,e_1$ στη θέση της ακμής e στο μονοπάτι P. Αυτό δείχνει ότι το γράφημα παραμένει συνδεδεμένο αφού η ακμή e διαγράφθηκε και άρα δεν είναι ακμή αποκοπής.

Έπειτα αποδεικνύουμε ότι αν η e δεν είναι ακμή αποκοπής τότε περιέχεται σε απλό κύκλο. Σε ένα συνδεδεμένο γράφημα υπάρχει πάντα ένα απλό μονοπάτι μεταξύ οποιωνδήποτε κόμβων του γραφήματος. Αφού η e δεν είναι ακμή αποκοπής το γράφημα μετά την διαγραφή της e παραμένει συνδεδεμένο. Άρα ακόμα και μετά τη διαγραφή θα υπάρχει ένα μονοπάτι P που θα συνδέει τους κόμβους στα άκρα της ακμής e. Συνδέοντας την ακμή e με το μονοπάτι P προκύπτει ένας απλός κύκλος που περιέχει την ακμή e.

Γ) Χρησιμοποιώντας το (B) αποδείξτε ότι κάθε ακμή σε ένα δέντρο είναι ακμή αποκοπής ενώ καμία ακμή σε ένα $n \times n$ πλέγμα δεν είναι ακμή αποκοπής. Γιατί είναι σημαντικό;

Το δέντρο είναι ένα άκυκλο συνδεδεμένο γράφημα και άρα από το (B) όλες οι ακμές είναι ακμές αποκοπής.

Για ένα πλέγμα, όταν $n=1$, τότε προφανώς ισχύει. Αλλά αν $n>1$, κάθε ακμή είναι μέρος ενός κύκλου.

Οι ακμές αποκοπής είναι πολύ σημαντικές αφού δείχνουν τα αδύνατα σημεία ενός δικτύου (π.χ. σε παράλληλο δίκτυο επεξεργαστών). Όσο περισσότερες ακμές απαιτούνται για να αποσυνδεθεί το δίκτυο τόσο καλύτερα.

9. Μονοπάτια(Wiley 7.2.9)

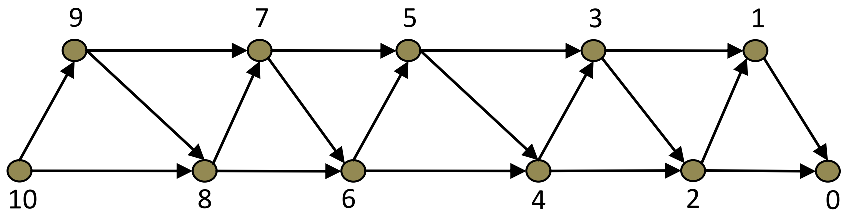
Να δείξετε ότι αν ένα γράφημα G έχει n κόμβους τότε το μακρύτερο απλό μονοπάτι θα έχει n-1 ακμές.

Έστω *G* ένα γράφημα με *n* κόμβους, και έστω *P* ένα μονοπάτι στο *G*. Αφού κάθε μονοπάτι δεν μπορεί να χρησιμοποιεί τον ίδιο κόμβο δύο φορές, το *P* δεν περιέχει περισσότερους από *n* κόμβους. Αφού σε κάθε μονοπάτι το πλήθος των ακμών είναι ίσο με το πλήθος των κορυφών μειωμένο κατά 1, το πλήθος των ακμών του *P* δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του n-1.

10. Παιχνίδια (Wiley Ex. 7.5.3)

Δύο άνθρωποι παίζουν ένα παιχνίδι με 10 πέτρες όπου στον γύρο του ο καθένας μπορεί να αφαιρέσει μία ή δύο πέτρες. Κερδίζει αυτός που αφαιρεί πέτρα(ες) τελευταίος. Υπάρχει στρατηγική νίκης για έναν από τους δύο παίκτες;

Καταρχήν φτιάχνουμε ένα γράφημα που δείχνει την κατάσταση του παιχνιδιού καθώς παίζουμε.

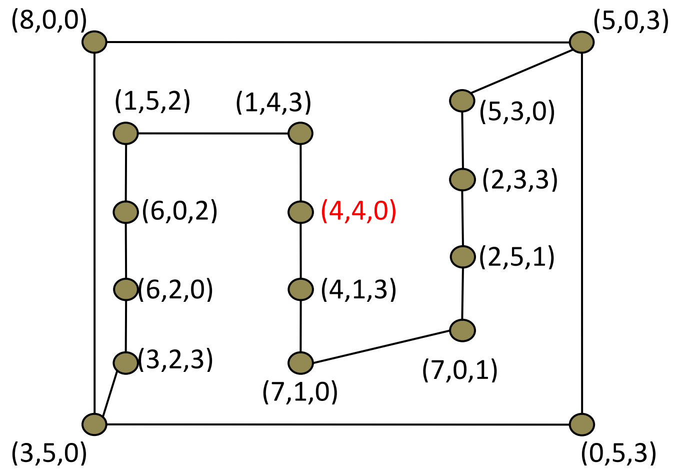


Θα λέμε ότι ένας κόμβος είναι *καλός* αν ο παίκτης που είναι σε αυτόν μπορεί να κερδίσει ανεξαρτήτως τι θα κάνει ο άλλος. Αντίστοιχα ορίζουμε τον *κακό* κόμβο. Για να κερδίσει ο παίκτης Α θα πρέπει ο παίκτης Β να είναι είτε στον κόμβο 1 ή στον κόμβο 2, οπότε και Ο Α βγάζει τον αντίστοιχο αριθμό πετρών και κερδίζει. Άρα ο 0 είναι καλός κόμβος ενώ ο 1 και 2 είναι κακοί κόμβοι. Όμως ο Α για να αναγκάσει τον Β να κινηθεί στους 1 ή 2 θα έπρεπε να είναι στον κόμβο 3, ο οποίος άρα είναι καλός κόμβος. Με τον ίδιο τρόπο οι κόμβοι 4 και 5 είναι κακοί κόμβοι. Τέλος, ακολουθώντας την ίδια λογική, οι κόμβοι 6 και 9 είναι καλοί κόμβοι ενώ οι υπόλοιποι είναι κακοί. Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης Α που παίζει πρώτος θα κινηθεί από τον κακό κόμβο 10 στον καλό 9 και από εκεί ότι και αν παίξει ο Β πάντα ο Α θα είναι σε καλό κόμβο και θα κερδίσει. Άρα ο Α έχει πάντα μία στρατηγική νίκης. Τι θα γινόταν αν είχαμε 9 πέτρες;

11. Παιχνίδια (Wiley 7.5.1)

Έστω ότι σε ένα κουβά έχουμε 8 λίτρα νερό και έχουμε επίσης δύο δοχεία όπου το πρώτο χωράει 5 λίτρα και το δεύτερο χωράει 3 λίτρα νερού. Χρησιμοποιώντας μόνο αυτά τα δοχεία βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να χωρίσουμε το νερό ώστε στον κάδο να είναι 4 λίτρα και στο μεγάλο δοχείο 4 λίτρα.

Η λύση αντιστοιχεί σε ένα μονοπάτι στο γράφημα από το (8,0,0) στο (4,4,0) στο παρακάτω γράφημα. Προσέξτε ότι στο γράφημα κάθε κόμβος μέσα στο τετράγωνο έχει ακμές προς δύο κόμβους που βρίσκονται στις γωνίες του τετραγώνου αλλά τις αφήσαμε έξω για ευκολία. Το παιχνίδι έχει δύο λύσεις, η μία λίγο μικρότερη της άλλης.



12. Γραφήματα (Rosen 8.2.5)

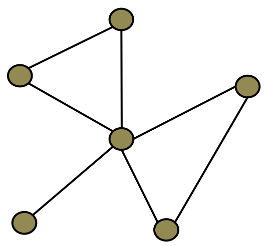
Μπορεί να υπάρξει γράφημα με 15 κορυφές, που η καθεμία έχει βαθμό 5;

Όχι, αφού 15*5=75 και το άθροισμα των βαθμών όλων των κόμβων δεν μπορεί να είναι περιττός αριθμός.

13. Γραφήματα (Rosen 8.2.27)

Πόσες ακμές έχει ένα γράφημα αν έχει κορυφές με βαθμό 5,2,2,2,2,1. Να σχεδιαστεί το γράφημα.

2E=5+2+2+2+2+1=14→ E=7



14. Γραφήματα (Rosen 8.2.44)

Να δειχτεί ότι αν το G είναι διμερές απλό γράφημα με *ν* κορυφές και *e* ακμές, ότι $e \leq v^2/4$

Έστω ότι το ένα σύνολο έχει *x* και το άλλο έχει *ν-x* κορυφές. Τότε ο μέγιστος αριθμός ακμών θα είναι:

$$f(x) = vx - x^2$$

από όπου για να βρούμε που μεγιστοποιείται έχουμε:

$$f'(x) = v - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{v}{2}$$

Αφού f'>0 για x<v/2 και f'<0 για x>v/2, η συνάρτηση έχει στο συγκεκριμένο σημείο μέγιστο. Άρα αποδείχτηκε.

15. Γραφήματα (Rosen 8.4.37)

Να δειχτεί ότι απλό γράφημα G με *n* κορυφές είναι συνεκτικό αν έχει περισσότερες από (*n*-1)(*n*-2)/2 ακμές.

Έστω ότι το *G* δεν είναι συνεκτικό. Τότε έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες όπου μία από τις δύο θα έχει *k* κόμβους, όπου 1≤*k*≤n-1.Το μέγιστο πλήθος ακμών σε αυτή την περίπτωση για τον *G* είναι:

$$\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \frac{\big(k(k-1) + (n-k)(n-k-1)\big)}{2} = k^2 - nk + \frac{n^2 - n}{2}$$

Αυτή η συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο *k*=*n*/2 και μεγιστοποιείται για *k*=1ή *k*=*n*-1. Για αυτές τις τιμές το πλήθος των ακμών είναι (*n*-1)(*n*-2)/2 και άρα αφού το G είναι συνεκτικό θα έχει σίγουρα περισσότερες από τόσες.

16. Γραφήματα (Rosen 8.4.47)

Να δειχτεί ότι απλό γράφημα *G* είναι διμερές αν και μόνο αν δεν έχει κυκλώματα με περιττό πλήθος ακμών.

Αν το γράφημα είναι διμερές (*A* και *B* σύνολα κόμβων) τότε οι κόμβοι σε κάθε μονοπάτι θα πρέπει να εναλλάσσονται μεταξύ του *A* και *B*. Άρα, ένα μονοπάτι που ξεκινά από το *A* θα σταματήσει στο *B* έπειτα από περιττό αριθμό ακμών και στο *A* έπειτα από ζυγό αριθμό ακμών. Άρα δεν μπορεί να έχει κυκλώματα με περιττό πλήθος ακμών.

Έστω τώρα ότι όλα τα κυκλώματα έχουν ζυγό πλήθος ακμών. Θα δείξουμε ότι το γράφημα πρέπει να είναι διμερές. Έστω ότι το *G* είναι συνεκτικό (αν δεν είναι δουλεύουμε σε κάθε συνεκτική συνιστώσα). Έστω *v* ένας κόμβος του *G* και έστω *A* το σύνολο των κόμβων όπου υπάρχει μονοπάτι από τον v με περιττό πλήθος ακμών και έστω B το σύνολο των κόμβων για τους οποίους υπάρχει μονοπάτι από το v με ζυγό πλήθος κόμβων. Αφού είναι συνεκτικό κάθε κόμβος θα ανήκει είτε στο A είτε στο B. Κανένας κόμβος u δεν μπορεί να ανήκει ταυτόχρονα στο A και B αφού τότε ακολουθώντας το μονοπάτι περιττού μήκους από το v στον u και έπειτα το μονοπάτι ζυγού μήκους από τον u στον v θα φτιάχναμε έναν κύκλο με περιττό πλήθος ακμών που είναι αντίθετο στην υπόθεση. Άρα το σύνολο των κόμβων έχει διασπαστεί σε δύο σύνολα. Έστω ότι (x,y) είναι μία ακμή και x ανήκει στο A. Τότε το περιττού μήκους μονοπάτι από το v στο x ακολουθούμενο από την ακμή (x,y) παράγει ένα μονοπάτι ζυγού μήκους από το v στο y και άρα το y ανήκει στο B. Άρα είναι διμερές.

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 7.5.4) Ένας θέλει να περάσει ένα ποτάμι και έχει μαζί του ένα τσακάλι, μία κατσίκα και ένα δέμα άχυρο. Το τσακάλι τρώει την κατσίκα και η κατσίκα το άχυρο. Αν υπάρχει μία βάρκα στην οποία χωράνε τρεις κάθε φορά να βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους ο άνθρωπος θα περάσει απέναντι αυτά που έχει χωρίς να φαγωθούν. Ποια είναι η καλύτερη λύση;

2. (Rosen 8.2.6) Να δειχτεί ότι επί του συνόλου ανθρώπων σε μία γιορτή το άθροισμα του πλήθους των ανθρώπων με τους οποίους κάποιος έκανε χειραψία είναι άρτιος αριθμός. Θεωρείστε ότι κανένας δεν κάνε χειραψία με τον εαυτό του.

3. (Rosen 8.2.28) Υπάρχει απλό γράφημα με 6 κορυφές με τους παρακάτω βαθμούς; Αν ναι, να σχεδιαστεί το γράφημα.
   a. 0,1,2,3,4,5
   b. 1,2,3,4,5,6
   c. 2,2,2,2,2,2
   d. 3,2,3,2,3,2
   e. 3,2,2,2,2,3
   f. 1,1,1,1,1,1
   g. 3,3,3,3,3,5
   h. 1,2,3,4,5,5

4. Να δειχτεί ότι αν το G είναι ένα απλό γράφημα με n κορυφές τότε η ένωση των G και G΄ είναι το πλήρες γράφημα K_n.

5. Για ποιες τιμές του n,m τα παρακάτω γραφήματα έχουν κύκλωμα και μονοπάτι Euler;
   a. Το πλήρες γράφημα K_n.
   b. Το πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n}$.