Ασκήσεις Κατανόησης στα Γραφήματα

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 31/1/2016

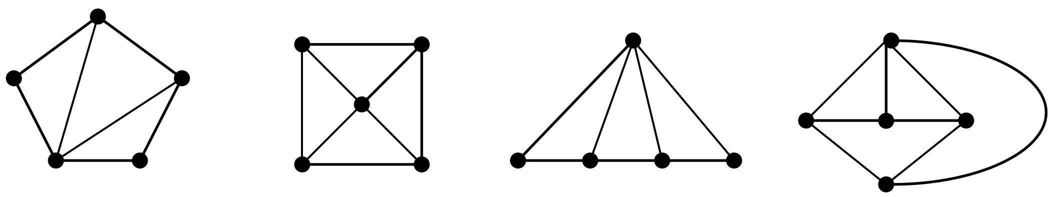
(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf ή .doc)

Να αναγράφετε στο παραδοτέο σας το ΑΕΜ και το όνομά σας.

1. (15%) Να αποδείξετε ότι κάθε απλό μη κατευθυνόμενο γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές δεν έχει κύκλο Euler.

2. (15%) Να χαρακτηρίσετε την κλάση των γραφημάτων στα οποία κάθε κύκλος Euler είναι επίσης και κύκλος Hamilton.

3. (15%) Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω 4 γραφήματα είναι ισομορφικά μεταξύ τους. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Για όποια είναι, να δοθεί ένας αντίστοιχος ισομορφισμός (δηλ. αντιστοιχία κορυφών, εφόσον πρώτα τις ονομάσετε.).



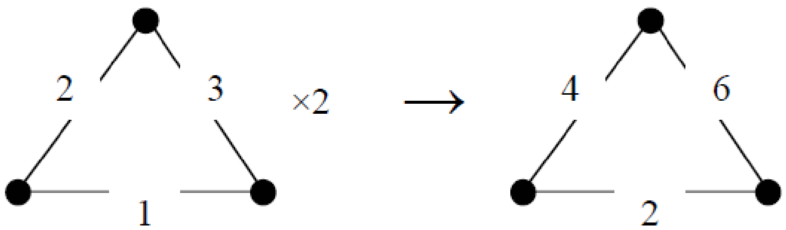
4. (5%+15%) α) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει απλό γράφημα με 12 κορυφές και 28 ακμές έτσι ώστε:

i) όλες οι κορυφές να έχουν βαθμό 3 ή 4

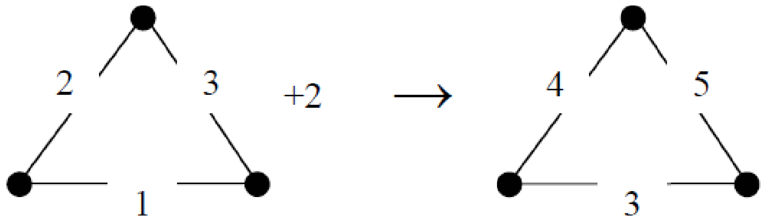
ii) όλες οι κορυφές να έχουν βαθμό 3 ή 6

β) Στην πρώτη εργασία ενός τμήματος του ΕΑΠ με 10 άνδρες και 17 γυναίκες όλοι οι φοιτητές ισχυρίζονται ότι συνεργάστηκαν με 2 άνδρες και 3 γυναίκες ακριβώς. Είναι δυνατόν να λένε όλοι την αλήθεια; (να το μοντελοποιήσετε με γραφήματα ώστε να δώσετε τη λύση)

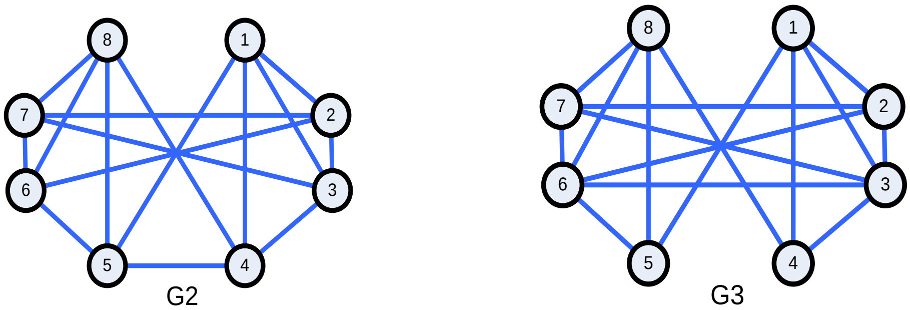
5. (7%+8%) α) Να αποδείξετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για την ακόλουθη πρόταση: «Σε ένα γράφημα με βάρη, το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών δεν μεταβάλλεται αν όλα τα βάρη πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο θετικό αριθμό». Για παράδειγμα,



β) Να αποδείξετε ή να δώσετε αντιπαράδειγμα για την ακόλουθη πρόταση: «Σε ένα γράφημα με βάρη, το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών δεν μεταβάλλεται αν σε όλα τα βάρη προστεθεί ο ίδιος θετικός αριθμός». Για παράδειγμα,



6. (10%+10%) α) Είναι τα ακόλουθα γραφήματα επίπεδα; Αν ναι, δώστε μια επίπεδη αποτύπωση, διαφορετικά αποδείξτε ότι δεν είναι.



G2 G3

β) Να δείξετε ότι αν Γ είναι ένα ΑΠΛΟ επίπεδο γράφημα τάξης 11, τότε το συμπλήρωμά του ΔΕΝ είναι επίπεδο γράφημα.

Ενδεικτικές Λύσεις

1. Το πλήρες γράφημα με 11 κορυφές έχει 55 ακμές. Συνεπώς, κάθε απλό γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές προκύπτει από το K_{11} με την αφαίρεση δύο ακμών. Για να αποκλείσω την ύπαρξη κύκλου Euler, χρειάζεται να διακρίνω δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Οι δύο ακμές που αφαιρέθηκαν από το K_{11} προσπίπτουν στην ίδια κορυφή. Αφού το γράφημα είναι απλό, οι δύο ακμές μπορούν να έχουν μόνο το ένα άκρο τους κοινό. Συνεπώς, το γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές έχει μία κορυφή βαθμού 8, δύο κορυφές βαθμού 9, και 8 κορυφές με βαθμό 10. Συνεπώς, δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler, αφού περιέχει κάποιες κορυφές με περιττό βαθμό.

Περίπτωση 2. Διαφορετικά, το γράφημα με 11 κορυφές και 53 ακμές πρέπει να έχει 4 κορυφές βαθμού 9 και 7 κορυφές βαθμού 10. Και σε αυτή την περίπτωση, το γράφημα δεν μπορεί να έχει κύκλο Euler.

2. Ένας κύκλος ο οποίος είναι τόσο κύκλος Euler όσο και κύκλος Hamilton πρέπει να διέρχεται από κάθε κορυφή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Hamilton) και από κάθε ακμή του γραφήματος ακριβώς μία φορά (επειδή είναι κύκλος Euler). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο αν το γράφημα είναι ένας απλός κύκλος C_n με n κορυφές και n ακμές (υπενθυμίζουμε ότι ο απλός κύκλος C_n , $n \geq 3$, αποτελείται από n κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_n$ και n ακμές $\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \ldots, \{u_{n-1}, u_n\}, \{u_n, u_1\}$). Συγκεκριμένα, αν το γράφημα περιείχε $n + 1$ ή περισσότερες ακμές, ο κύκλος Euler δεν θα ήταν κύκλος Hamilton (θα περιείχε περισσότερες από n ακμές και συνεπώς θα διερχόταν από κάποια κορυφή περισσότερες από μία φορές). Αν το γράφημα περιείχε $n - 1$ ή λιγότερες ακμές, είτε δεν θα περιείχε κανένα κύκλο (θα ήταν δέντρο) είτε δεν θα ήταν συνεκτικό. Σε καμία από τις δύο περιπτώσεις δεν θα είχε ούτε κύκλο Euler ούτε κύκλο Hamilton. Τέλος, το C_n είναι το μοναδικό γράφημα με n κορυφές και n ακμές που περιέχει κύκλο Euler ή / και κύκλο Hamilton.

Για το αντίστροφο, είναι προφανές ότι το C_n περιέχει ακριβώς έναν κύκλο ο οποίος είναι τόσο κύκλος Euler όσο και κύκλος Hamilton.

3. Ξέρουμε πώς δύο γραφήματα δεν μπορούν να είναι ισομορφικά μεταξύ τους όταν έχουν διαφορετικό αριθμό κορυφών ο ένας από τον άλλον. Και παρατηρούμε πως τα τέσσερα γραφήματα της εκφώνησης έχουν τον ίδιο αριθμό κορυφών (5 κορυφές ο καθένας) οπότε έχει νόημα να ψάξουμε για ισομορφισμούς μεταξύ τους. Ας ονομάσουμε Γ_i τον $i^{οστό}$ γράφο, για i=1,2,3,4.

Για να είναι ισομορφικά δύο γραφήματα πρέπει επίσης να έχουν τον ίδιο αριθμό ακμών. Παρατηρούμε πώς οι Γ_1 και Γ_3 έχουν από 7 ακμές ο καθένας ενώ οι Γ_2 και Γ_4 έχουν από 8 ακμές ο καθένας. Οπότε αυτό που μας απομένει είναι να εξετάσουμε 1.

αν οι Γ_1 και Γ_3 είναι ισομορφικοί μεταξύ τους ή όχι και 2. αν οι Γ_2 και Γ_4 είναι ισομορφικοί μεταξύ τους ή όχι.

1. Υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των Γ_1 και Γ_3 ;

Ονομάζουμε (όπως θέλουμε) τις πέντε κορυφές του Γ_1. Ας πάρουμε για παράδειγμα την αρίθμηση 1,2,3,4 και 5 των πέντε κορυφών του Γ_1 σύμφωνα με την οποία τον αριθμό 1 δίνουμε στην πιο πάνω κορυφή, τον αριθμό 2 στην επόμενη της 1 σύμφωνα με την φορά των δεικτών του ρολογιού, κ.ο.κ (δηλ. 3 στην επόμενη της 2, 4 στην επόμενη της 3 και 5 στην επόμενη της 4 σύμφωνα πάντα με την φορά των δεικτών του ρολογιού). Από αυτήν την αρίθμηση προκύπτει πώς το σύνολο E_1 των ακμών του Γ_1 είναι $E_1 = \{ \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}, \{1,4\}, \{2,4\} \}$.

Υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ του Γ_1 και του Γ_3 αν μπορούμε να ονομάσουμε τις κορυφές του Γ_3 με τους αριθμούς 1,2,3,4 και 5 έτσι ώστε το σύνολο E_3 των ακμών του Γ_3 να είναι ίσο με το σύνολο E_1 των ακμών του Γ_1. Πράγματι μπορούμε να το κάνουμε αυτό, αρκεί να ονομάσουμε 4 την απάνω κορυφή του Γ_3 και 3,2,1,5 τις κάτω κορυφές του Γ_3 πηγαίνοντας από τα αριστερά προς τα δεξιά.

2. Υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των Γ_2 και Γ_4 ;

Ονομάζουμε (όπως θέλουμε) τις πέντε κορυφές του Γ_2. Ας πάρουμε για παράδειγμα την αρίθμηση 1,2,3,4 και 5 των πέντε κορυφών του Γ_1 σύμφωνα με την οποία τον αριθμό 1 δίνουμε στην πάνω αριστερά κορυφή, τον αριθμό 2 στην επόμενη της 1 σύμφωνα με την φορά των δεικτών του ρολογιού, κ.ο.κ (δηλ. 3 στην επόμενη της 2, 4 στην επόμενη της 3 σύμφωνα πάντα με την φορά των δεικτών του ρολογιού) και 5 στην κορυφή που είναι στο κέντρο του Γ_2. Από αυτήν την αρίθμηση προκύπτει πώς το σύνολο E_2 των ακμών του Γ_2 είναι $E_2 = \{ \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,1\}, \{5,1\}, \{5,2\}, \{5,3\}, \{5,4\} \}$.

Υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ του Γ_2 και του Γ_4 αν μπορούμε να ονομάσουμε τις κορυφές του Γ_4 με τους αριθμούς 1,2,3,4 και 5 έτσι ώστε το σύνολο E_4 των ακμών του Γ_4 να είναι ίσο με το σύνολο E_2 των ακμών του Γ_2. Πράγματι μπορούμε να το κάνουμε αυτό, αρκεί να ονομάσουμε 5 την απάνω κορυφή του Γ_4, να ονομάσουμε 4 την κάτω κορυφή του Γ_4 και 1, 2, 3 τις κορυφές που βρίσκονται ανάμεσά σε αυτές τις δύο κορυφές, πηγαίνοντας από τα αριστερά προς τα δεξιά.

4. α)

i) Από το λήμμα της χειραψίας (Θεώρημα 1.5, Σελ. 70, τόμος Β) γνωρίζουμε ότι θα πρέπει το άθροισμα των βαθμών ενός απλού μη κατευθυνόμενου γραφήματος να ισούται με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Όμως, αν ο μέγιστος βαθμός ενός απλού μη κατευθυνόμενου γραφήματος 12 κορυφών είναι 4, τότε και ο μέγιστος αριθμός ακμών που μπορεί να έχει είναι 12*4 / 2 = 24. Αλλά η εκφώνηση θεωρεί πως το γράφημα έχει 28 ακμές, πράγμα που δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει.

ii) Σε αυτή την περίπτωση δεν υπάρχει κατ' αρχήν πρόβλημα με το λήμμα της χειραψίας, γιατί $3*12 / 2 = 18 < 28 < 6 * 12 / 2 = 36$. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι για κάποιο $K \in \{0,...,12\}$, ακριβώς K κορυφές έχουν βαθμό 3 και οι υπόλοιπες 12−K κορυφές έχουν βαθμό 6. Τότε, το λήμμα της χειραψίας γράφεται ως εξής:

$3*K + 6*(12-K) = 2*28 = 56 \Rightarrow 72 - 3*K = 56 \Rightarrow K = 16 / 3$. Μα αυτό είναι αδύνατον να ισχύει για οποιοδήποτε γράφημα, γιατί το K θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός.

β) Ο ισχυρισμός της εκφώνησης μπορεί να αναπαρασταθεί «γραφικά» με το παρακάτω γράφημα.

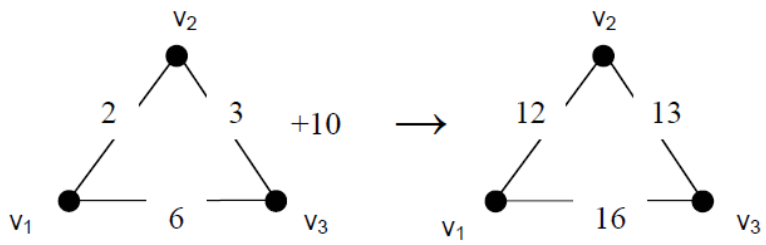
Θεωρούμε ένα γράφημα με 27 κορυφές, δέκα από τις κορυφές (ας τις ονομάσουμε $\alpha_1,\ldots,\alpha_{10}$) αντιπροσωπεύουν έναν άνδρα η καθεμία, και οι υπόλοιπες 17 κορυφές (ας τις ονομάσουμε $\gamma_1,\ldots,\gamma_{17}$) αντιπροσωπεύουν μία γυναίκα η καθεμία. Ενδιαφερόμαστε για δύο συγκεκριμένους υπογράφους του γραφήματός μας, ο ένας είναι ο υπογράφος G_α των ανδρών με κορυφές $\alpha_1,\ldots,\alpha_{10}$ και βαθμό 2 για κάθε κορυφή και ο άλλος υπογράφος είναι ο υπογράφος G_γ των γυναικών με κορυφές $\gamma_1,\ldots,\gamma_{17}$ και βαθμό 3 για κάθε κορυφή. Ο υπογράφος G_α είναι ένας 2-κανονικός γράφος με 10 κορυφές, ενώ ο υπογράφος G_γ είναι ένας 3-κανονικός γράφος με 17 κορυφές. Άρα, ο G_α θα πρέπει να έχει 2x10/2=20/2 ακμές, πράγμα εφικτό, και ο G_γ θα πρέπει να έχει 3x17/2=51/2 ακμές, πράγμα αδύνατο. Άρα κάποια γυναίκα δεν λέει την αλήθεια.

5.

α) Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει.

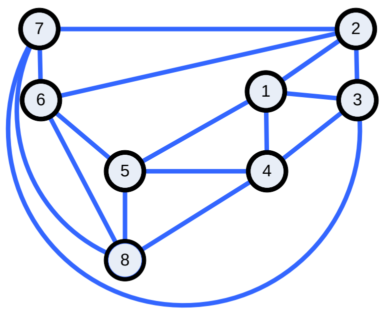
Έστω G ένα γράφημα με βάρη και G' το γράφημα που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε όλα τα βάρη του G με τον ίδιο θετικό αριθμό c. Έστω επίσης ότι το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ δύο κορυφών a και b (ή κάποιο από αυτά αν υπάρχουν πολλά) έχει μήκος m. Τότε ισχυριζόμαστε ότι το ίδιο μονοπάτι στο G' που έχει μήκος cm είναι το μικρότερο μονοπάτι μεταξύ των κορυφών a και b. Πράγματι, αν υπήρχε μονοπάτι μεταξύ των κορυφών a και b με μήκος μικρότερο από cm στο G' τότε το ίδιο μονοπάτι στο G θα είχε μήκος μικρότερο από m το οποίο άτοπο.

β) [Σχόλιο: Εδώ δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε το ίδιο σκεπτικό διότι τα μήκη των μονοπατιών δεν αυξάνονται ομοιόμορφα αλλά ανάλογα με το πόσες ακμές περιέχουν. Έτσι αν προσθέσουμε το ίδιο θετικό βάρος σε όλες τις ακμές, ένα μονοπάτι που έχει μεν μικρό βάρος αλλά πολλές ακμές θα «επιβαρυνθεί» αρκετά ενώ κάποιο άλλο με λιγότερες ακμές θα «επιβαρυνθεί» λιγότερο και μπορεί τελικά να αναδειχτεί σε συντομότερο μονοπάτι. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι πρέπει να αναζητήσουμε κατάλληλο αντιπαράδειγμα]



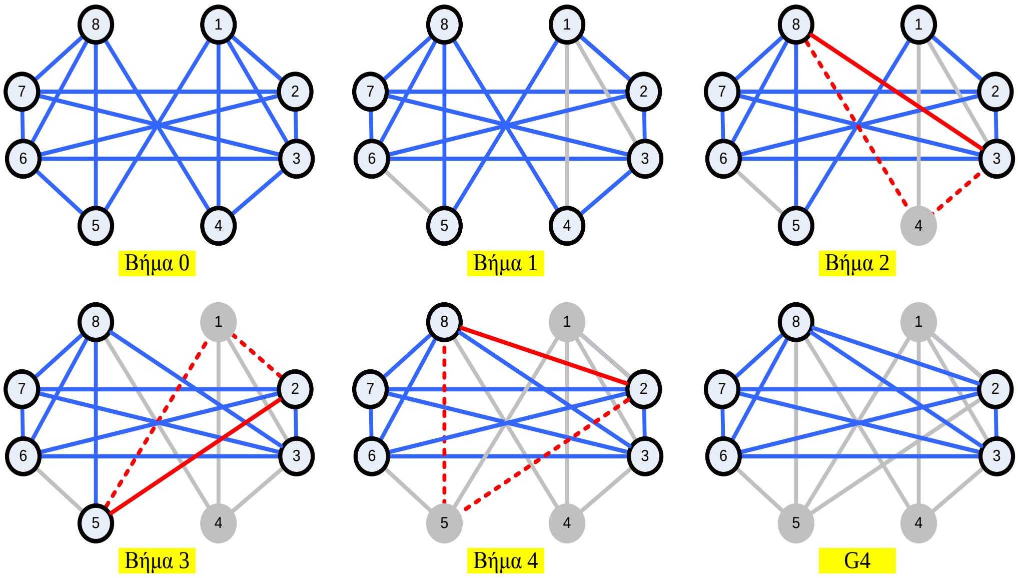
Στο πρώτο γράφημα παραπάνω το ελάχιστο μονοπάτι μεταξύ των κορυφών v_1 και v_3 είναι το v_1v_2-v_2v_3 και έχει μήκος 5. Αν προσθέσουμε τον αριθμό 10 σε όλα τα βάρη προκύπτει το δεύτερο γράφημα, όπου το μήκος του μονοπατιού αυτού γίνεται 25 ενώ το ελάχιστο μονοπάτι μεταξύ των κορυφών v_1 και v_3 είναι το v_1v_3 με μήκος 16. Άρα η πρόταση δεν ισχύει.

6. α) Το γράφημα G2 είναι επίπεδο, και προκειμένου να το βεβαιώσουμε παρουσιάζουμε μια επίπεδη αποτύπωσή του:



G2

Αντίθετα, το γράφημα G3 δεν είναι επίπεδο. Θα το δείξουμε αυτό υποδεικνύοντας ένα υπογράφημα του G3 που είναι ομοιομορφικό με το K5. Κατ' αρχήν (βήμα 1) διαγράφουμε τις ακμές {5,6}, {1,3} και {1,4}. Στη συνέχεια (βήμα 2) εκτελούμε την υποδιαίρεση φια τον κόμβο 4, που (μετά τις διαγραφές) έχει βαθμό 2. Αποτέλεσμα αυτής της πράξης είναι η προσθήκη μιας καινούργιας ακμής {3,8} που δεν υπήρχε στο G3. Ύστερα (βήμα 3) εκτελούμε την πράξη της υποδιαίρεσης στην κορυφή 1 (που επίσης είναι βαθμού 2 μετά τις διαγραφές ακμών), προσθέτοντας την καινούργια ακμή {2,5}. Τέλος κάνουμε υποδιαίρεση στην κορυφή 5, απαλείφοντας μάλιστα την ακμή {2,5} που είχαμε προσθέσει στην στο βήμα 3. Το γράφημα G4 που καταλήγουμε είναι βέβαια ισομορφικό του K5 και προέκυψε από υπογράφημα του G3 με διαδοχικές υποδιαιρέσεις. Άρα το G3 δεν είναι επίπεδο γράφημα.



β) Έστω ένα οποιοδήποτε <u>απλό</u> <u>επίπεδο</u> γράφημα Γ με N κορυφές και M ακμές. Θα πρέπει να ισχύει $M \leq 3N–6$ για το γράφημα αυτό. Μας ενδιαφέρει η περίπτωση που και το συμπλήρωμά του Γ' είναι επίσης επίπεδο γράφημα. Έστω ότι και το Γ' ήταν επίπεδο γράφημα. Τότε (λόγω συμπληρωματικότητας) έχει ακριβώς $N(N–1)/2 – M$ ακμές και N κορυφές, άρα (αφού κι αυτό είναι επίπεδο) θα πρέπει να ισχύει ότι $N(N–1)/2 – M \leq 3N–6$. Άρα, <u>αναγκαία συνθήκη</u> για να είναι και το Γ και το Γ' επίπεδα γραφήματα, είναι η εξής:

$$N(N–1)/2 – 3N + 6 \ \leq 3N–6 \Rightarrow N^2 – 13N +12 \leq 0$$

από το οποίο καταλήγουμε ότι

$$N \leq \frac{13+\sqrt{73}}{2} < 11$$

Εφόσον αρχική μας υπόθεση ήταν ότι το Γ έχει 11 κορυφές, καταλήγουμε ότι δεν είναι δυνατόν να είναι και το συμπληρωματικό του γράφημα Γ' επίσης επίπεδο γράφημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την ερώτηση ως εξής: Για οποιοδήποτε απλό, επίπεδο γράφημα Γ με 11 κορυφές, ισχύει ότι $M \leq 3*11–6 = 27$. Όμως, αναγκαστικά το συμπλήρωμά του Γ', που επίσης είναι απλό γράφημα 11 κορυφών, θα έχει τουλάχιστον $11*(11–1)/2 – 27 = 55 – 27 = 28$ ακμές, και κατά συνέπεια δε μπορεί να είναι επίσης επίπεδο γράφημα.