

Ασκήσεις Κατανόησης στα Αθροίσματα και στην Συνδυαστική  
Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 8/1/2016

(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf ή .doc)

Να αναγράφετε στο παραδοτέο σας το ΑΕΜ και το όνομά σας.

1. (15%) Κάνοντας χρήση ενός συνδυαστικού επιχειρήματος αποδείξτε ότι η ποσότητα  $\frac{(10!)!}{(10!)^9!}$  είναι ακέραιος αριθμός.

2. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα αλφάβητο το οποίο αποτελείται από 4Α, 5Β και 3Γ (τα γράμματα κάθε ομάδας είναι μη διακριτά μεταξύ τους, π.χ. όλα τα Α θεωρούνται ίδια). Πόσες λέξεις μήκους 12 (με πόσους τρόπους μπορούμε να μεταθέσουμε τα γράμματα σε 12 θέσεις) αν:

α) (5%) Δεν έχουμε κανέναν περιορισμό.

β) (15%) Πρέπει να εμφανίζεται μέσα στην λέξη οπωσδήποτε η συμβολοσειρά BBB.

3. (15%) Κατά πόσους τρόπους 7 άνδρες μπορούν να επιλεγούν από 12 έτσι ώστε δύο συγκεκριμένοι απ' αυτούς να μην είναι ποτέ μαζί; Γενικεύστε θέτοντας n αντί για 12 και k αντί για 7.

4. (20%) Θεωρούμε όλα τα σημεία (α,β) στο επίπεδο με α,β ακεραίους. Ορίζουμε ως **βήμα**

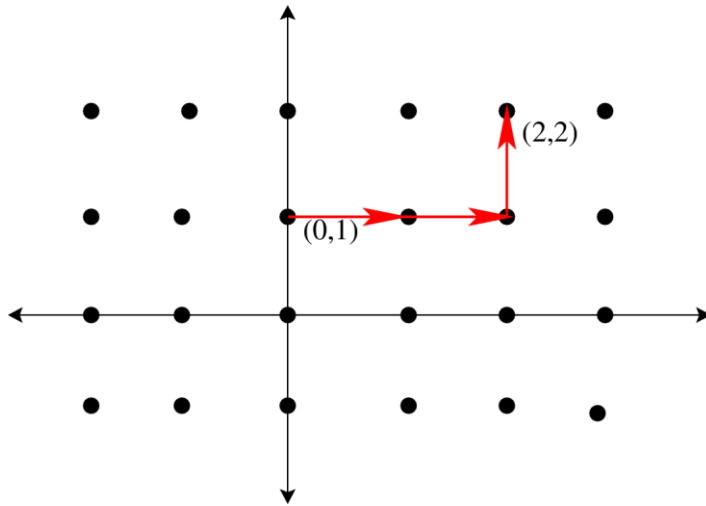
Δ: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α+1,β)

Α: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α-1,β)

Π: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α,β+1) και

Κ: τη μετάβαση από το σημείο (α,β) στο (α,β-1)

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μία ακολουθία 3 βημάτων (ΔΔΠ) με αρχή το (0,1) και τέλος το (2,2).



- A) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων που δεν περιλαμβάνουν βήματα A και K, οι οποίες ξεκινούν από το  $(0,0)$  και να καταλήγουν στο  $(x,y)$  με  $x>0, y>0$ ;
- B) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων που δεν περιλαμβάνουν βήματα A και K, οι οποίες ξεκινούν από το  $(0,0)$ , διέρχονται διαδοχικά από τα σημεία  $(3,2)$  και  $(4,5)$  και καταλήγουν στο  $(x,y)$ , όπου  $x>4, y>5$ ;
- Γ) Πόσες είναι οι διαφορετικές ακολουθίες βημάτων μήκους  $2n$ , που ξεκινούν από το  $(0,0)$ , διέρχονται από το σημείο  $(k,n-k)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , και καταλήγουν στο  $(0,0)$ ;

**5. (15%)** α) Βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων όλων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία από τις λέξεις ΠΥΓΜΗ, ΤΖΑΚΙ, ΒΕΛΟΣ.

β) Να βρείτε το πλήθος των μεταθέσεων των 24 γραμμάτων του αλφάβητου που να περιέχει τουλάχιστον μία εκ των λέξεων: ΤΗΝ, ΣΤΗΝ, ΑΣΤΗΝ, ΧΑΣΤΗΝ.

γ) Πόσοι θετικοί ακέραιοι  $\leq 1000$  είναι σχετικά πρώτοι με το 15.

**6. (15%)** α) Να υπολογίσετε προσεγγιστικά το άθροισμα:  $\sum_{i=1}^n \sqrt[3]{i}$

β) Να υπολογίσετε ακριβώς το άθροισμα:  $S_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i}$  ( $|x| < 1$ )

γ) Να δείξετε ότι το ο κλειστός τύπος του αθροίσματος  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$  είναι  $\frac{n}{2n+1}$ .