

Ασκήσεις Κατανόησης στην Βαθμιδωτή Αριθμητική, Μαθηματική
Επαγωγή, Σύνολα, Συναρτήσεις/Σχέσεις

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 8/12/2015

(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf ή .doc)

Να αναγράφετε στο παραδοτέο σας το ΑΕΜ και το όνομά σας.

1. (20%) Έστω ότι A είναι το σύνολο όλων των σημείων στο επίπεδο χωρίς το σημείο $(0,0)$. Δηλαδή, $A = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} - \{(0,0)\}$. Ορίζουμε την σχέση T στο A :

$(a,b) T (c,d)$: τα σημεία (a,b) και (c,d) βρίσκονται στην ίδια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
Σας ζητούνται τα εξής:

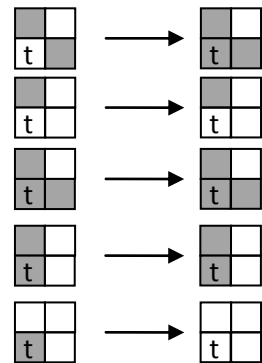
α) Να δείξετε ότι η T είναι σχέση ισοδυναμίας.

β) Να περιγράψετε τις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας.

γ) Αν το σύνολο A περιέχει και το σημείο $(0,0)$ (δηλαδή είναι όλο το επίπεδο) τότε η T είναι σχέση ισοδυναμίας;

2. (20%) Να δείξετε ότι για όλα τα σύνολα A, B και Γ ισχύει ότι: Αν $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$ και $A \cap \bar{\Gamma} \subseteq B \cap \bar{\Gamma}$ (με $\bar{\Gamma}$ αναπαριστούμε το συμπλήρωμα του Γ) τότε ισχύει $A \subseteq B$.

3. (20%) Έστω μία άπειρη σκακιέρα με τετράγωνα, όπου όλα τα τετράγωνα αρχικά είναι λευκά πλην ενός αρχικού συνόλου M_0 με n μαύρα τετράγωνα, όπου το M_0 αποτελεί την αρχική διαμόρφωση των μαύρων τετραγώνων. Ορίζουμε νέες διαμορφώσεις από μαύρα τετράγωνα ως εξής: ένα τετράγωνο t θα ανήκει στο M_k (θα είναι μαύρο δηλαδή μετά από k βήματα) αν και μόνο αν δύο τετράγωνα μεταξύ των t , του τετραγώνου πάνω από το t και του τετραγώνου δεξιά του t ανήκουν στη διαμόρφωση M_{k-1} . Χρησιμοποιείστε ισχυρή επαγωγή για να δείξετε ότι $M_n = \emptyset$, δηλαδή μετά από n βήματα σε μία αρχική διαμόρφωση M_0 με n μαύρα τετράγωνα, κανένα τετράγωνο δεν θα είναι μαύρο. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται μερικές περιπτώσεις μόνο για το τετράγωνο t .



4. (20%) Να δείξετε ότι ισχύει για κάθε σύνολο A και B ότι $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$. Να δείξετε αν και το αντίστροφο είναι αληθές. Δηλαδή να δείξετε αν ισχύει για όλα τα σύνολα ότι $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$. Με $P(A)$ αναπαριστούμε το δυναμοσύνολο του συνόλου A .

5. (20%) α) Να δείξετε ότι ο αριθμός $n^4 + 4$ δεν είναι πρώτος για κάθε $n > 1$.

β) Έστω οι περιττοί πρώτοι $3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$ σε αύξουσα σειρά (p_1, p_2, p_3, \dots) . Να αποδείξετε αν ισχύει ή όχι η εξής πρόταση: Για κάθε i ισχύει ότι $p_i p_{i+1} + 2$ είναι πρώτος.