Ασκήσεις Κατανόησης

Καταληκτική Ημερομηνία Παράδοσης: 12/11/2015

(με email στον βοηθό μαθήματος σε μορφή .pdf και .doc – και τα δύο αρχεία θα στείλετε)

1. (20%) Να μεταφραστεί η δήλωση «Κάποιος φοιτητής πέρασε όλα τα μαθήματα στα οποία εξετάστηκε» σε λογική έκφραση χρησιμοποιώντας τις παρακάτω συναρτησιακές προτάσεις:
S(x): «ο x είναι φοιτητής»
M(y): « το y είναι μάθημα»
E(x,y): « ο φοιτητής x εξετάστηκε στο μάθημα y»
P(x,y): « ο φοιτητής x πέρασε το μάθημα y»
Να ορίσετε κατάλληλα τους τομείς αναφοράς των μεταβλητών.

2. (20%) Τρεις ύποπτοι, ο Α, ο Β και ο Γ δίνουν τις εξής καταθέσεις:
Ο Α λέει: «ο Β είναι ένοχος και ο Γ είναι αθώος.»
Ο Β λέει: «αν ο Α είναι ένοχος τότε και ο Γ είναι ένοχος».
Ο Γ λέει: «είμαι αθώος και τουλάχιστον ένας από τους υπόλοιπους είναι ένοχος.»
Έστω p, q, r τρεις προτασιακές μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν αντίστοιχα «ο Α είναι αθώος», «ο Β είναι αθώος» και «ο Γ είναι αθώος». Φτιάξτε (σε έναν μοναδικό πίνακα) τους πίνακες αληθείας των τριών προτάσεων που αντιστοιχούν στις παραπάνω τρεις καταθέσεις.
(1) Μπορούν οι τρεις καταθέσεις να είναι ταυτόχρονα αληθείς; Αν ναι, τότε ποιος είναι αθώος και ποιος είναι ένοχος;
(2) Υπάρχει μία κατάθεση η οποία όταν είναι αληθής συνεπάγεται μία άλλη. Ποια είναι η μία και ποια είναι η άλλη;
(3) Αν υποθέσουμε ότι και οι τρεις ύποπτοι είναι αθώοι, ποιος έδωσε ψευδή κατάθεση και ποιος αληθή;

3. (20%) (1) Εξηγείστε αν η παρακάτω πρόταση είναι αντίφαση, ταυτολογία ή τίποτε από τα δύο χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας.

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

(2) Εξηγείστε, χρησιμοποιώντας το (1), αν η παρακάτω πρόταση είναι αντίφαση, ταυτολογία ή τίποτε από τα δύο.

$$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge \neg q$$

(3) Γράψτε την πρόταση $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ σε διαζευκτική μορφή (δηλ. στην μορφή $\theta_1 \vee \ldots \vee \theta_n$, n>1, όπου τα θ_i είναι συζεύξεις μεταβλητών ή των αρνήσεών τους (φ, ψ, $\neg\varphi$, $\neg\psi$).
(4) Χρησιμοποιώντας το (3) δείξτε πως η πρόταση $(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \psi$ είναι ισοδύναμη με μία πρόταση της μορφής $\theta \vee \neg\theta$, και δώστε δύο ισοδύναμες μορφές της πρότασης θ.

4. (20%) Να δείξετε ότι με δεδομένο ότι η λογική πρόταση $\psi = \forall x\ (A(x) \leftrightarrow [F(x) \vee \exists y(P(x,y) \wedge A(y))])$ είναι αληθής τότε η λογική πρόταση $\varphi = \exists x \neg A(x) \rightarrow \exists x\ \neg F(x)$ είναι έγκυρο συμπέρασμά της.

5. (20%) Να κάνετε τις εξής αποδείξεις:

(α) Αν το γινόμενο δύο θετικών πραγματικών αριθμών είναι μεγαλύτερο από 100 τότε τουλάχιστον ένας από τους αριθμούς είναι μεγαλύτερος του 10. Χρησιμοποιήστε έμμεση απόδειξη.
(β) Να δείξετε με αντίφαση την πρόταση «Δεν υπάρχει μέγιστος άρτιος ακέραιος αριθμός.»
(γ) Να δείξετε ότι κάποιο ψηφίο εμφανίζεται άπειρες φορές στην δεκαδική αναπαράσταση του π (3.14159....).
(δ) Να δειξετε αν η παρακάτω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντιπαράδειγμα: «αν ο n^2 είναι ρητός τότε και ο n είναι ρητός».

<u>Ενδεικτικές (Σύντομες) Λύσεις</u>

1.

(υπάρχουν και άλλες δυνατές λύσεις αρκεί να μην συμπίπτουν με το κατηγόρημα – π.χ. θέτοντας το y να έχει τομέα αναφοράς όλα τα μαθήματα δεν έχει νόημα με βάση την ύπαρξη του κατηγορήματος M(y)). Ο τομέας αναφοράς της x είναι όλοι οι άνθρωποι ενώ ο τομέας αναφοράς της y είναι όλες οι ανθρώπινες δραστηριότητες. Ένας τρόπος μετάφρασης της δήλωσης είναι ο:

$$\exists x\, [\, S(x) \wedge \forall y\, (\, (M(y) \wedge E(x,y)) \rightarrow P(x,y)\,)]$$

2.

Αρχικά «κωδικοποιούμε» τις τρεις καταθέσεις των υπόπτων σε λογικές προτάσεις, που για συντομία θα συμβολίζουμε αντίστοιχα με ϕ, χ, ψ :

- (ϕ) Κατάθεση του Α: $\neg q \wedge r$
- (χ) Κατάθεση του Β: $\neg p \rightarrow \neg r$
- (ψ) Κατάθεση του Γ: $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα αληθείας των τριών προτάσεων:

Α/Α	p	q	r	ϕ	χ	ψ
1	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ
2	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
3	Α	Ψ	Α	***Α***	Α	***Α***
4	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
5	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
6	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
7	Ψ	Ψ	Α	***Α***	Ψ	***Α***
8	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ

(1) Για να διαπιστώσουμε αν είναι δυνατό να είναι και οι τρεις καταθέσεις αληθείς, αρκεί να αναζητήσουμε γραμμές στον πίνακα αληθείας όπου οι στήλες των τριών προτάσεων ϕ, χ, ψ έχουν ταυτόχρονα τιμή Α. Μοναδική τέτοια γραμμή στον παραπάνω πίνακα είναι προφανώς η 3η (κόκκινο χρώμα). Άρα οι τρεις καταθέσεις μπορούν να είναι ταυτόχρονα αληθείς.
Για να συμπεράνουμε ποιοι είναι αθώοι και ποιοι ένοχοι σε αυτή την περίπτωση, αρκεί να ελέγξουμε τις τιμές αληθείας των τριών προτασιακών μεταβλητών *p*,*q*,*r*, στην αντίστοιχη γραμμή. Άρα:

- Ο Α είναι αθώος
- Ο Β είναι ένοχος
- Ο Γ είναι αθώος

(2) Ξεκινώντας από τον ϕ, ελέγχουμε αν στις γραμμές που ο ϕ αληθεύει (3η, 7η), οι αντίστοιχες γραμμές των χ, ψ έχουν επίσης τιμές Α. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει για την πρόταση χ, αφού είναι ψευδής στην 7η γραμμή. Άρα ο ϕ δεν συνεπάγεται ταυτολογικά τον χ. Αντίθετα, παρατηρούμε ότι ο τύπος ψ αληθεύει στις γραμμές 3 και 7, άρα ο ϕ συνεπάγεται ταυτολογικά τον ψ.
Αντίστοιχα, ο χ αληθεύει στις γραμμές 1,2,3,4,6 και 8, αλλά οι ϕ, ψ δεν αληθεύουν για παράδειγμα στην 1η γραμμή. Άρα, ο χ δεν συνεπάγεται ταυτολογικά κάποια άλλη πρόταση.
Τέλος, η ψ αληθεύει στις γραμμές 3,5,7. Παρατηρούμε ότι οι ϕ, χ, δεν αληθεύουν για παράδειγμα στην 5η γραμμή. Άρα, η ψ δεν συνεπάγεται ταυτολογικά κάποια άλλη πρόταση.
(3) Αρκεί να ελέγξουμε την γραμμή (1η – πράσινο χρώμα) όπου οι προτασιακές μεταβλητές *p*,*q*,*r* είναι αληθείς, οπότε οι αντίστοιχες τιμές αληθείας των ϕ, χ, ψ, δίνουν το ζητούμενο. Δηλαδή:

- Ο Α ψεύδεται
- Ο Β λέει αλήθεια
- Ο Γ ψεύδεται

3.

(1)

$$(p \wedge (p \to q)) \to q$$

p	q	$p \to q$	$(p \wedge (p \to q))$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Αφού η τελευταία στήλη είναι όλη Αληθές είναι ταυτολογία.

(2) Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες που γνωρίζουμε για να μετατρέψουμε τον τύπο $(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q$, σε μορφή συγκρίσιμη με τον τύπο του υποερωτήματος (1). Έχουμε:

$(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q \equiv$ Διπλή Άρνηση

$\neg\neg(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q \equiv$ De Morgan

$\neg[\neg(p \wedge (p \to q)) \vee q] \equiv$ τύπο συνεπαγωγή

$\neg[(p \wedge (p \to q)) \to q]$

Ο τελευταίος τύπος είναι η άρνηση του τύπου του υποερωτήματος (1), ο οποίος είναι ταυτολογία. Άρα ο τύπος $(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q$ είναι αντίφαση.

(3) Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες που ξέρουμε για να μετατρέψουμε τον τύπο $(\phi \wedge (\phi \to \psi)) \to \psi$, σε διαζευκτική μορφή:

$(\phi \wedge (\phi \to \psi)) \to \psi \equiv$ τύπος συνεπαγωγής

$(\phi \wedge (\neg\phi \vee \psi)) \to \psi \equiv$ τύπος συνεπαγωγής

$\neg(\phi \wedge (\neg\phi \vee \psi)) \vee \psi \equiv$ De Morgan

$\neg\phi \vee \neg(\neg\phi \vee \psi) \vee \psi \equiv$ De Morgan

$\neg\phi \vee (\neg\neg\phi \wedge \neg\psi) \vee \psi \equiv$ Διπλή Άρνηση

$\neg\phi \vee (\phi \wedge \neg\psi) \vee \psi$

Ο τελευταίος τύπος είναι στη ζητούμενη διαζευκτική μορφή.

(4) Χρησιμοποιώντας και την διαζευκτική μορφή του (3), έχουμε:

$\neg\phi \vee (\phi \wedge \neg\psi) \vee \psi \equiv$ Αντιμεταθετικότητα

$(\phi \wedge \neg\psi) \vee \neg\phi \vee \psi \equiv$ Προσεταιριστικότητα

$(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \vee \psi) \equiv$ Διπλή Άρνηση

$(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \vee \neg\neg\psi) \equiv$ De Morgan

$(\phi \wedge \neg\psi) \vee \neg(\phi \wedge \neg\psi)$

Η τελευταία πρόταση είναι στη ζητούμενη μορφή αν θέσουμε θ, την πρόταση $\phi \wedge \neg\psi$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε:

$\neg\phi \vee (\phi \wedge \neg\psi) \vee \psi \equiv$ Αντιμεταθετικότητα

$(\phi \wedge \neg\psi) \vee \neg\phi \vee \psi \equiv$ Προσεταιριστικότητα

$(\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \vee \psi) \equiv$ Διπλή Άρνηση

$(\neg\neg\phi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\phi \vee \psi) \equiv$ De Morgan

$\neg(\neg\phi \vee \psi) \vee (\neg\phi \vee \psi) \equiv$ Αντιμεταθετικότητα

$(\neg\phi \vee \psi) \vee \neg(\neg\phi \vee \psi) \equiv$

Ο τελευταίος τύπος είναι στη ζητούμενη μορφή αν θέσουμε θ, τον τύπο $\neg\phi \vee \psi$.

4.

Από καθολική αμεσότητα προκύπτει ότι για αυθαίρετο c έχουμε:
$A(c) \leftrightarrow [F(c) \vee \exists y(P(c,y) \wedge A(y))])$ (1)
Έστω ότι ισχύει η υπόθεση της φ (αν είναι ψευδής τότε προφανώς η συνεπαγωγή είναι αληθής). Επομένως, πρέπει απλά να ελέγξουμε την περίπτωση όπου η υπόθεση είναι Αληθής.
Από υπαρξιακή αμεσότητα υπάρχει β ώστε να ισχύει $\neg A(\beta)$
Αφού η (1) ισχύει για αυθαίρετο c σημαίνει ότι θα ισχύει και για β. Άρα προκύπτει:
$\neg [F(\beta) \vee \exists y(P(\beta,y) \wedge A(y))]$
Που από De Morgan έχουμε:
$\neg F(\beta) \wedge \forall y(\neg P(\beta,y) \vee \neg A(y))]$
Από εδώ προκύπτει ότι ισχύει (αφού είναι σύζευξη και είναι αληθής)
$\neg F(\beta)$
Από υπαρξιακή γενίκευση προκύπτει ότι
$\exists x \neg F(x)$

Άρα δείξαμε ότι αν η υπόθεση της φ είναι Αληθής τότε είναι αληθές και το συμπέρασμά της. Αν η υπόθεση είναι ψευδής τότε η συνεπαγωγή είναι πάντα Αληθής. Επομένως, αποδείξαμε ότι η φ είναι ένα έγκυρο συμπέρασμα της ψ.

5. (α) Θα δείξουμε ότι αν και οι δύο θετικοί αριθμοί είναι μικρότεροι του 10 τότε το γινόμενό τους είναι μικρότερο του 100. Έστω ότι και οι δύο αριθμοί $x,y>0$ δεν είναι μεγαλύτεροι του 10. Τότε αφού $0<x<10$ και $0<y<10$ συνεπάγεται ότι $x\times y<10\times 10=100$. Αποδείχτηκε.
(β) Έστω ότι υπάρχει μέγιστος ακέραιος αριθμός και έστω ότι αυτός είναι ο M. Τότε ο M+2 είναι επίσης ακέραιος και μάλιστα επειδή είναι το άθροισμα δύο άρτιων αριθμών συνεπάγεται ότι και ο M+2 είναι επίσης άρτιος. Όμως, $M+2>M$ το οποίο είναι άτοπο με βάση την αρχική υπόθεση που κάναμε. Άρα ισχύει η πρόταση.
(γ) Μη κατασκευαστική απόδειξη. Έστω ότι κανένα ψηφίο δεν επαναλαμβάνεται άπειρες φορές αλλά μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος φορών. Αυτό σημαίνει ότι αφού έχουμε 10 ψηφία, το π θα έχει πεπερασμένο πλήθος ψηφίων και άρα θα είναι ρητός αριθμός. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού ο π είναι άρρητος αριθμός. Άρα κάποιο ψηφίο επαναλαμβάνεται άπειρες φορές (απλά δεν ξέρουμε ποια).
(δ) Η πρόταση είναι ψευδής και την αποδεικνύουμε με αντιπαράδειγμα. Πράγματι το $n^2=2$ είναι ρητός αλλά το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.